revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PROPOSTA DE UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA PARA FORMAÇÃO DOCENTE SOBRE O ENSINO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO PRIMEIRO GRAU COM UMA INCÓGNITA

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2022.11.25.46-79

Edelweis Jose Tavares Barbosa[1]
Saddo Ag Almouloud[2]

Resumo: Retomamos neste artigo uma parte de pesquisa de doutorado que teve como objetivo analisar, comparativamente, as praxeologias em documentos oficiais, no livro didático e do professor, referentes ao ensino de equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita. Para tanto, expandimos as discussões oriundas da pesquisa que resultaram em uma proposta de um Percurso de Estudo e Pesquisa para a Formação de Professores (PEP-FP) para o ensino de equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita. O PEP-FP apoia-se em alguns elementos conceituais que fazem parte do dispositivo, tais como: o Modelo Epistemológico de Referência (MER) e os tipos de Organizações Matemáticas (OM) que serão apresentados mais adiante. O dispositivo vem como uma proposta metodológica para formação de professores da Educação Básica, tendo como finalidade compreender a razão de ser das equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita e a organização didática a almejar para a formação inicial ou continuada desses profissionais. A pesquisa fundamenta-se na Teoria Antropológica do Didático (TAD), mais especificamente nos constructos teórico-metodológicos de um PEP. Ademais, partimos da apresentação de um MER para o ensino de equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita. Esse MER é a alavanca para construção de organizações didáticas que viabilizem as atividades de estudo e pesquisa oriundas da questão proposta para a realização das atividades que conduziriam à resolução das questões derivadas. Por esta razão, propusemos um dispositivo didático (PEP-FP) por meio do qual o professor da Educação Básica teria acesso a uma visão, não apenas ampliada, mas regulada/ajustada pelos três princípios estruturantes do PEP e as dialéticas fundamentais de como estudar e ensinar equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita.

Palavras-chave: Percurso de Estudo e Pesquisa. Modelo Epistemológico de Referência. Modelo Praxeológico de Referência.

PROPOSAL OF A STUDY AND RESEARCH PATH FOR TEACHER TRAINING ON THE TEACHING OF FIRST-DEGREE POLYNOMIAL EQUATIONS WITH ONE UNKNOWN VARIABLE

Abstract: In this article we resume a part of a doctoral research that aimed to analyze, comparatively, the praxeologies in official documents, in the textbook and in the teacher's teaching of first degree polynomial equations with one unknown variable. To do so, we expanded the discussions that resulted in a proposal of a Study and Research Path for Teacher Education (SRP-TE) for teaching first degree polynomial equations with one unknown variable. The SRP-TE is based on some conceptual elements that are part of the device, such as: the Epistemological Reference Model (ERM) and the types of Mathematical Organizations (OM) that will be presented later on. The device comes as a methodological proposal for the training of Basic Education teachers, with the purpose of understanding the rationale of polynomial equations of the first degree with one unknown variable and the didactic organization to be aimed at for the initial or continued training of these professionals. The research is based on the Anthropological Theory of Didactics (TAD), more specifically on the theoretical and methodological constructs of a SRP. Furthermore, we started by presenting a ERM for the teaching of polynomial

[1] Doutor em Ensino das Ciências pela Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE). Professor Adjunto do Núcleo de Formação Docente (NFD) e do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Federal de Pernambuco- Campus Caruaru (UFPE-CAA). E-mail: edelweisb@yaho.com.br Orcid: https://orcid.org/0000-0001-6032-9367 .

[2] Doutor em Matemática e aplicações pela Universidade de Rennes I, França. Professor da Universidade Federal da Bahia. E-mail: saddoag@gmail.com ´Orcid: https://orcid.org/0000-0002-8391-7054

equations of the first degree with one unknown variable. This ERM is the lever to build didactic organizations that enable the study and research activities arising from the proposed question to carry out the activities that would lead to the resolution of the derived questions. For this reason, we proposed a didactic device (SRP-TE) through which the Basic Education teacher would have access to a vision, not only amplified, but regulated/adjusted by the three structuring principles of the PEP and the fundamental dialectics of how to study and teach first degree polynomial equations with an unknown variable.
Keywords: Study and research path. Reference Epistemological Model. Praxeological Model of Reference

Introdução

A visão clássica do ensino da Álgebra está relacionada com a aprendizagem de regras para a manipulação de símbolos, geralmente letras, simplificação de expressões algébricas e resolução de equações. Como consequência, a Álgebra escolar tem servido para ensinar apenas um conjunto de procedimentos que, para os alunos, não têm relação com outros conhecimentos matemáticos nem com o mundo real (KAPUT, 2005).

No ambiente escolar ainda persiste uma forte ideia de que a Aritmética trata de números e a Álgebra de letras. Ao estabelecer limites entre os conteúdos no currículo escolar, percebe-se que na Aritmética ensinam-se, comumente, as quatro operações fundamentais da aritmética, frações, mínimo múltiplo comum, máximo divisor comum, e na Álgebra, os conteúdos tradicionais, tais como equações, cálculo com letras, expressões algébricas, abordados a partir do 7° ano do ensino fundamental, além de se considerar que os conteúdos aritméticos são conhecimentos prévios para a introdução da Álgebra.

Por outro lado, a Álgebra escolar não se restringe ao ensino e aprendizagem de um conjunto de regras e técnicas, mas transforma-se numa forma de pensar e raciocinar, em que os alunos generalizam, modelam e analisam situações matemáticas (KIERAN, 2007). Dessa maneira, os alunos necessitam compreender os conceitos algébricos, as estruturas e o formalismo de forma a utilizarem, adequadamente, a simbologia para registrar as suas ideias e conclusões (NCTM, 2007).

Ao longo das duas últimas décadas, o contexto brasileiro vem passando por transformações neste cenário escolar. Primeiro com a implementação dos documentos oficiais que orientam o ensino da Matemática no Brasil, como os Parâmetros Curriculares Nacionais-PCN (BRASIL, 1998) e os respectivos documentos regionais, culminando com a implementação da Base Nacional Comum Curricular- BNCC (BRASIL, 2018).

Os PCN de Matemática para o ensino fundamental estão organizados em quatro blocos: Números e operações, Espaço e forma, Grandezas e medidas e Tratamento da informação. As diretrizes acerca do domínio da Álgebra são propostas para serem introduzidas no bloco de "números e operações", por meio de atividades em que o estudante amplie os seguintes conceitos e procedimentos (BRASIL, 1998), por exemplo: a utilização de representações algébricas para expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas e regularidades observadas em algumas sequências numéricas; compreensão da noção de variável pela interdependência da variação de grandezas; construção de procedimentos para calcular o valor numérico de expressões algébricas simples.

A BNCC no ensino fundamental recomenda que os conteúdos sejam trabalhados de forma articulada em seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade. Tratando-se do campo da Álgebra, este documento oficial preconiza para o sétimo ano: Linguagem algébrica; Variável e incógnita; Equivalência de expressões algébricas; Identificação da regularidade de uma sequência numérica; Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente, proporcionais e Equações polinomiais do primeiro grau (BRASIL, 2018).

A fim de corroborar com as discussões sobre o ensino de Álgebra, esse artigo tem a finalidade de discutir e propor um dispositivo didático denominado Percurso de Estudo e Pesquisa para a Formação de Professores (PEP-FP), para o ensino do conceito de equação polinomial do primeiro grau com uma incógnita. O PEP-FP tem alguns elementos conceituais que fazem parte do dispositivo, que são: o Modelo Epistemológico de Referência (MER) e os tipos de Organizações Matemáticas (OM) que serão apresentados mais adiante. Este dispositivo didático vem como uma proposta metodológica para formação de professores de Educação Básica, tendo como finalidade compreender a razão de ser da equação polinomial do primeiro grau com uma incógnita e a organização didática a almejar para a formação inicial ou continuada desses profissionais.

Na próxima seção, apresentamos alguns elementos da Teoria da Antropológica do Didático-TAD que alicerçarão o estudo aqui mencionado.

Alguns elementos da teoria antropológica do didático

As discussões teóricas e metodológicas ligadas à Didática da Matemática estão direcionadas, dentre outras questões, à construção de modelos didáticos[3] interligados aos processos de ensino e aprendizagem de matemática em diferentes níveis de ensino. O nosso foco de discussões nesta parte é a Teoria Antropológica do Didático que traz em seu bojo

[3] Um modelo didático encontra-se ligado a um modelo epistemológico, neste cenário, relacionado a uma conceptualização do que se conclui do que é ensinar e aprender matemática, nos momentos históricos, culturais e tradicionais (BOSCH; GASCÓN, 2010).

aportes importantes na constituição e análise dos modelos propostos, a exemplo do Percurso de Estudo e Pesquisa-PEP.

De acordo com Almouloud (2007), a TAD é um aporte relevante para a didática da matemática, proporcionando elementos que explicam a discussão pertinente ao ensino e à aprendizagem das organizações matemáticas, analisando objetos presentes no sistema didático.[4] Nesta teoria, Chevallard (1992), a partir de uma problemática ecológica, propõe que os objetos matemáticos não existem em si, mas como entidades que emergem a partir de sistemas de práticas que se estabelecem em uma determinada instituição.

A TAD, em especial a noção de praxeologia, é resultado da ampliação do campo de investigação procedente da transposição didática, ao consentir a interpelação e restrições que se instituem entre os diferentes objetos de saberes a ensinar no interior de uma determinada instituição.

Chevallard (1999) caracterizou a sua teoria quase que de forma axiomática. Primeiramente, apoiou-se em três conceitos primitivos – *objetos*, *pessoas* e *instituições* –, assim como nos conceitos de *relações pessoais* de um indivíduo com um objeto, e de *relações institucionais* de uma instituição com um objeto. Um exemplo de objeto matemático é a equação polinomial do primeiro grau, saber contemplado nesse estudo, mas existem também os objetos: escola, professor, aprender, saber, entre outros.

Nesta perspectiva teórica, tudo é *objeto* (passível de ser conhecido). Um objeto se constitui como tal a partir do momento em que uma pessoa (X) ou uma instituição (I) reconhece a sua existência. Chevallard (1999) propõe, ainda, outra noção básica, a de relação, configurada como relações pessoais denotadas por R (X, O) e relações institucionais por R (I, O) com um objeto. Isto é, a existência de um objeto (O) se dá, caso ele exista para, pelo menos, uma pessoa (X) ou uma instituição (I).

Outra noção fundamental dessa teorização é a de instituição (I), que consiste em um dispositivo social total que, mesmo tendo uma extensão muito reduzida no espaço social, permite e impõe aos seus sujeitos, maneiras próprias de fazer e de pensar, bem como de possibilitar a existência de um dado saber. Portanto, todo saber é saber de pelo menos uma instituição. Para Chevallard (2003), um saber não existe no vazio. São exemplos de instituição: a família, a sala de aula, a escola, um livro didático, entre outros.

O outro elemento importante é a pessoa (X). Noção complexa, que se desmembra e faz sentido quando são consideradas outras dimensões, a saber: indivíduo e sujeito. Segundo

[4] Chevallard (2009) descreve um sistema didático como um conjunto em três esferas: estudante, professor e um desafio didático, em que faz com que o estudante tente resolver o desafio didático por intermédio docente.

Chevallard (2003), o estágio primário é o de indivíduo, que, como o próprio nome sugere, caracteriza esse ser único e imutável, contemplado em certo sentido, pela dimensão biológica. Independente de instituições, ele será o mesmo ser.

O indivíduo torna-se um sujeito quando se relaciona com uma instituição I qualquer, e a partir de um processo de sujeição, passa a agir em conformidade com as exigências e restrições da(s) instituição(ões) das quais ele faz parte. Desde cedo, o indivíduo é submetido a certas instituições com as suas demandas, hábitos, formas que o fazem, ao mesmo tempo, dependente e sustentado pelas múltiplas instituições com as quais se relaciona, como a família, em que se torna sujeito.

De acordo com Chevallard (2003), a dimensão mais subjetiva diz respeito à pessoa, que é a soma (ou produto) das sujeições ao grande número de instituições com as quais ela se relaciona ao longo de sua vida. Essas instituições foram aos poucos formando a sua personalidade, e inspirando as suas atitudes e maneiras de ser e de viver as suas relações pessoais.

Para colaborar nesses processos de análises das relações pessoais e institucionais, temos o desenvolvimento da noção de organização praxeológica que permite modelizar às práticas sociais em geral, e em particular as atividades matemáticas. Para Chevallard (1998, 2014), a existência de um tipo de tarefa matemática em um sistema de ensino está combinada à existência de no mínimo uma técnica de estudo desse tipo de tarefa e uma tecnologia referente a essa técnica, mesmo que a teoria que justifique essa tecnologia seja omitida. O próximo subtópico aprofundará essa noção.

A noção de praxeologia

As praxeologias se estabelecem a partir de noções chaves, como tipos de tarefas (T) que podem ser expressas por um verbo pertencente a um conjunto de tarefas t do mesmo tipo, por meio de uma técnica (τ) que, por sua vez, é explicada e legitimada por uma tecnologia (θ), justificada e esclarecida por uma teoria (Θ). Portanto, a praxeologia, constituída por estes componentes $[T, \tau, \theta, \Theta]$, está vinculada a um primeiro bloco prático-técnico $[T, \tau]$, denominado o *saber-fazer*, e um segundo bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$ que se revela na associação entre certo tipo de tarefa e uma técnica, designando o saber, resultado da articulação entre a tecnologia e a teoria.

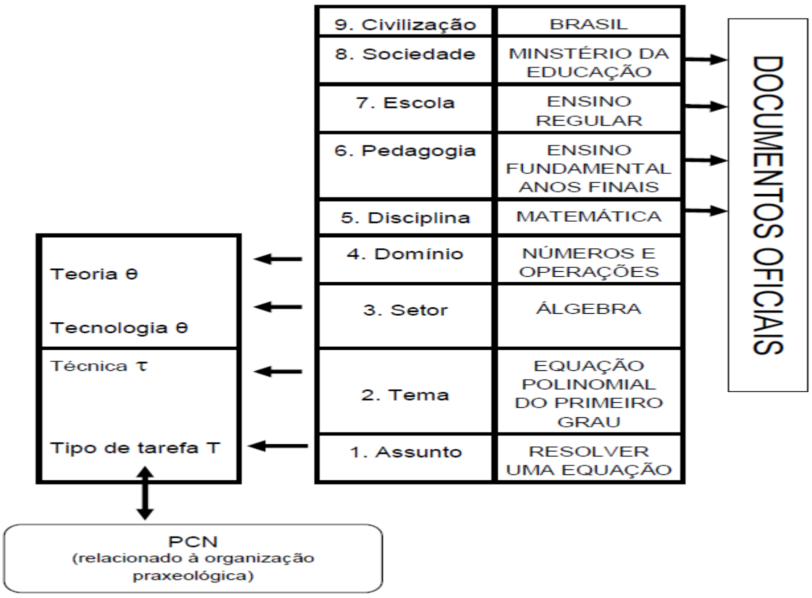
Chevallard (1999) assevera que é necessário também que se faça uma distinção das praxeologias que são compostas em organizações (matemática e didática). A organização matemática é a construção da realidade matemática para sala de aula, constituída em torno de tipos de tarefas (T) matemáticas realizadas, de técnicas (τ) matemáticas explicadas, de tecnologias (θ) justificadas e de teorias (Θ) que se constitui em objetos matemáticos a serem estudados ou sistematizados em momentos de estudo.

Por sua vez, a organização didática se institui a partir do momento em que existe uma organização matemática sendo colocada em execução. Por exemplo: a concretização de um tema em sala de aula, encontrar a raiz de uma equação polinomial do primeiro grau com uma incógnita. Para tanto, Chevallard (1999) distingue seis momentos de estudo ou didáticos: (1) o primeiro encontro com a organização matemática; (2) a exploração do tipo de tarefa e elaboração de uma técnica; (3) a constituição do ambiente tecnológico-teórico; (4) o trabalho com a técnica; (5) a institucionalização; (6) a avaliação.[5]

Chevallard (2002, 2007) observa que existe o fenômeno de codeterminação didática que pressupõe a correspondência entre as organizações matemática e didática. Desse modo, esse autor estabelece que um determinado saber apresenta uma escala hierárquica na qual cada nível se refere a uma realidade e determina a ecologia dessas organizações: o seu *nicho* (as funções que os níveis exercem) e o *habitat* (o lugar onde há objetos matemáticos nos quais se encontra um saber).

A Figura 1 representa os níveis de codeterminação didática (CHEVALLARD, 2002) considerados nesta pesquisa.

Figura 1: os níveis de codeterminação didáticas – as praxeologias matemáticas e didáticas dos documentos oficiais PCN-BNCC



Fonte: Adaptada de Chevallard (2007) por Barbosa (217, p.164)

[5] Sob dois aspectos: a avaliação das relações pessoais e a avaliação da relação institucional, ambas em relação ao objeto construído, que se articulam com o momento da institucionalização, permitindo relançar o estudo, demandar a retomada de alguns dos momentos e, eventualmente, do conjunto do trajeto didático.

Os níveis de codeterminação que interagem reciprocamente: desde os níveis comuns (os níveis indexados por Chevallard (2007): -3, -2, -1, 0) até os níveis específicos no domínio da matemática (níveis 1, 2, 3, 4 e 5). Esses níveis podem ser assim identificados: da civilização, da sociedade, da escola, da pedagogia, da disciplina, do domínio, do setor de estudo, do tema e do assunto. Para Chacón (2008), existe uma correlação entre as "Organizações Matemáticas OM e os níveis de codeterminação didática C-DD" (p. 73). Os níveis que se localizam sob o nível da disciplina são organizados de forma agregada a uma Organização Matemática (OM) complexa progressiva (pontual, local, regional e global).

De tal modo, que uma organização matemática pontual está associada ao nível cinco (assunto) e ao nível menos um, que é (a escola). Na nossa pesquisa, por exemplo, podemos considerar a praxeologia em torno da tarefa T_1, resolver a equação ($x + 4 = 12$). A organização matemática local é composta das OM pontuais e tem o estatuto do tema (equação do primeiro grau). No nível 3, setor (conjuntos de tarefas de equações do primeiro grau), corresponde a uma organização maior: após a fusão das OM local e pontual, tem uma organização matemática regional. Por fim, a organização matemática global refere-se ao domínio de estudo que, neste artigo, é a álgebra.

Na próxima seção, faremos uma breve reflexão sobre o modelo epistemológico de referência (MER).

Modelo epistemológico de referência- MER

A teoria antropológica do didático (TAD) está em franco desenvolvimento. Nesse processo encontramos vários autores que estão contribuindo para tais avanços e, dentre eles, podemos destacar os seguintes: Bolea (2002), Sierra (2006), Garcia (2005), Ruiz-Munzón (2010), Santos (2014), Lucas (2015), Ruiz-Munzón, Bosch e Gascón (2011), Gascón (2014). Esses autores propõem a ideia de Modelo Epistemológico Referência (adiante apenas MER) que pode ser definido, de maneira breve, como uma atividade matemática existente em termos de praxeologias. Corroborando com essa discussão, Sierra (2006) argumenta em sua tese que

> O MER pode ser expresso sob a forma de uma sucessão de praxeologias correspondentes para o desenvolvimento de respostas parciais para uma questão problemática inicial. Cada praxeologia sucessória surge como uma extensão ou o desenvolvimento da praxeologia anterior, dadas as limitações desta última para fornecer respostas para as questões levantadas (SIERRA, 2006, p. 47).

Desse modo, pode-se dizer que o MER permite que se conheça os processos de ensino e aprendizagem em uma determinada instituição em relação a um objeto matemático específico, ou seja, viabiliza uma autodescrição do conhecimento matemático em jogo. Esse modelo frequentemente assume a forma de uma sucessão de praxeologias de complexidade crescente e os seus componentes correspondem aos do "conhecimento matemático". Portanto, podemos entender a "análise" da atividade matemática como uma organização teórica que emerge da atividade matemática enquanto instrumento.

Qualquer MER está implicitamente ligado a uma ou mais instituições de referência, embora, em princípio, seja livre de restrições ou limitações "didáticas". Portanto, a descrição do MER deve ser completada pela descrição de reconstrução institucional. Isso requer, particularmente, que se tenha ou deva-se ter nessa instituição um projeto especificado *a priori* a fim de realizar-se o processo de estudar esse conhecimento. Nesta perspectiva, Bosch e Gascón (2010) asseveram que o MER precisa ser considerado como sistema de referência relativo e transitório.

A transposição didática é particularmente útil para conduzir o olhar do pesquisador a partir das diferentes instituições envolvidas no processo de estudo (em particular, a comunidade produtora do saber sábio e noosfera). O MER também permite distinguir as limitações institucionais das que são submetidas às "praxeologias para ensinar" a fim de tornarem-se "praxeologias efetivamente ensinadas".

O autor afirma ainda que

> O MER específico ou local (compatível com um MER geral) é construído em educação matemática como ferramenta heurística para o ensino de certos fenômenos visíveis. A sua função principal é fornecer os elementos necessários para desenvolver problemas educacionais cujo estudo permitirá melhorar a compreensão desses fenômenos. Só desta forma pode emancipar didática ao modelo epistemológico dominante nas instituições em causa e ser capaz de construir de forma independente o seu próprio objeto de estudo (GASCÓN, 2014, p. 14).

Na análise do processo institucional de ensino no nível da TAD, Bosch e Gascón (2005) acrescentam ainda que não podemos levar em conta apenas os dados provenientes de uma única instituição, como a sala de aula ou a escola. Tampouco podemos ficar com os dados que emanam do comportamento individual dos sujeitos de uma ou mais instituições.

Do ponto de vista metodológico, em qualquer investigação no cerne do programa epistemológico, é necessário que o pesquisador torne explícito um modelo epistemológico que servirá como referência para observar os fatos empíricos.

No contexto da TAD, temos ainda a dimensão econômica e a dimensão ecológica, que permitem a identificação do Modelo Epistemológico Dominante (MED). Nesse sentido

Chevallard (1989), Gascón (1994) e Bolea (2003) asseveram que a álgebra escolar, no contexto francês e espanhol, é a aritmética generalizada, ou seja, as letras indicam sempre incógnitas com valor numérico a serem determinadas. Quanto ao papel das variáveis ou parâmetros, este fica em segundo plano, bem como os possíveis significados não numéricos. Bolea (2003), por sua vez, assevera que o cálculo algébrico na educação básica é um prolongamento do cálculo aritmético em que certos números são representados por letras. Para essa autora, as características da concepção da álgebra escolar como aritmética generalizada são as seguintes: (a) as razões de ser da álgebra escolar; (b) os objetos matemáticos a partir dos quais os conceitos de álgebra escolar são construídos; (c) os elementos mais significativos das atividades associadas à álgebra escolar; e (d) as dificuldades mais destacadas na realização das atividades "algébricas".

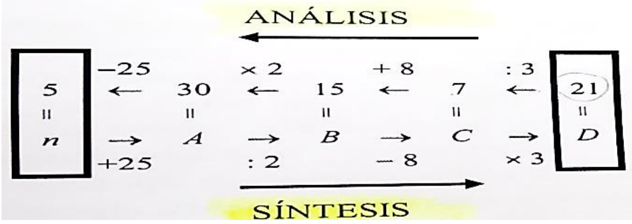
Construímos o nosso MER apoiando-se nos processos de algebrização de uma Organização Matemática (OM) em torno de problemas aritméticos e do estudo de equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita, construção que realizamos nas duas próximas seções.

Algebrização de uma organização matemática (OM) em torno de problemas aritméticos

Ruiz-Munzón, Bosch e Gascón (2010) consideram um "problema aritmético" aquele que pode ser resolvido por uma sequência de operações aritméticas (+, -, ×, /, entre outras) executável a partir dos dados dos problemas, dados em que normalmente são conhecidas as quantidades de certas grandezas. Desse modo, quando temos uma OM gerada por problemas aritméticos – que podem ser considerados tarefas problemáticas de partida –, por técnicas de resolução clássicas que são incorporadas nas exposições orais, com base nos dados e por uma sequência de operações aritméticas para calcular uma quantidade desconhecida, Chevallard (2002) propôs o processo de resolução ou cadeia estruturada e hierárquica de operações aritméticas que denominou de programa de cálculo aritmético (PCA).

Para Gascón (1993), considerar um padrão clássico análise-síntese é estabelecer uma técnica para resolução de problemas aritméticos por excelência, isto é, um PCA também pode ser avaliado como sínteses da resolução (originalmente oral) de algum tipo de problema aritmético. Os elementos tecnológico-teóricos que ajudam a descrever, justificar e interpretar essa prática matemática elementar é essencialmente reduzido para as propriedades dos valores das operações – entre grandezas, operações aritméticas e as relações entre elas –, embora também pudesse ser adicionado, no plano teórico, o discurso implícito “descrever e interpretar o referido padrão de análise-síntese”. A Figura 2 apresenta esse padrão.

Figura 2: Programa de Cálculo Aritmético (PCA)



Fonte: Ruiz-Munzón, Bosch e Gascón (2010, p. 659)

O PCA aparece e efetua-se no trabalho matemático dos estudantes desde o início do ensino primário, mas nunca são tematizados ou provocam questões tecnológicas sobre sua descrição, justificação, alcance. Assim, não é possível enunciar teoremas que lhes dizem respeito. Em outras palavras, os PCA fazem parte da prática matemática na escola, mas não são objetos matematizados ou paramatemáticos (CHEVALLARD, 2004).

Um exemplo típico de problema de aritmética que é resolvido por um PCA descrito por Ruiz-Munzón, Bosch e Gascón (2010) é o seguinte:

> P_0: Anna pensou em um número, adicionou 25, dividiu o resultado por 2, subtraiu 8 e multiplicou tudo por 3. Se ao final obteve 21, que número Anna pensou?

Uma resposta aritmética expressa verbalmente é seguinte: "Se, ao final, obteve 21, antes de multiplicar por 3, tinha 7; antes de subtrair 8, tinha 15; antes de dividir por 2, tinha 30; e antes de adicionar 25; tinha 5. Então, Anna pensou no número 5”.

Esses autores consideram que esse problema parte das tarefas que compõem certa OM que denominaram como um sistema de partida *S*, ou seja, a partir do sistema *S* (em modelos subsequentes), é fácil levantar questões de natureza tecnológica, como: Por que o tipo de resultado que se recebe é obtido? Como interpretar esses resultados? Qual é o âmbito ou domínio de validade das técnicas? A delimitação dos tipos de problemas é resolvida com o mesmo PCA?

Com base no exposto, advém a necessidade de ampliar a modelagem do sistema progressivo inicial mediante caracterização em três fases descritas a seguir.

Primeira fase do processo de algebrização

Ruiz-Munzón, Bosch e Gascón (2010) exemplificam um primeiro tipo de incompletude de uma OM inicial em torno de problemas de aritmética. Podemos considerar um problema (também formular em termos da implementação do PCA) da seguinte forma:

> P_1: Pense em um número, some em dobro o seu consecutivo, adicione 15 ao resultado e, finalmente, subtraia o triplo do número pensado inicialmente. Que resultado se obtém? O que acontece caso se troque o número pensado inicialmente?
> Por exemplo, se o número é 49, obtém-se: $PCA(49) = 49 + 2.50 + 15 - 3.49 = 17$
> Se tomado inicialmente o número 10, tem-se: $PCA(10) = 10 + 2.11 + 15 - 3.10 = 17$.

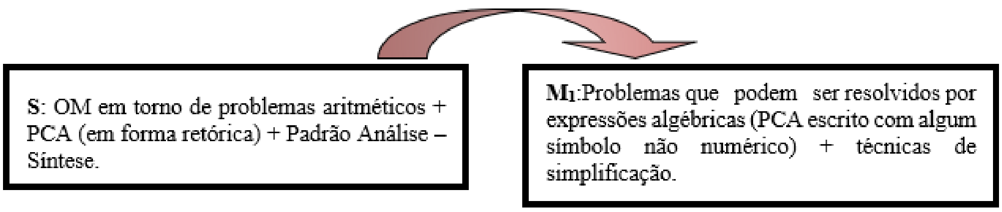
A resolução aritmética desse problema, quer dizer, a execução do PCA indicado, sempre chega ao mesmo resultado numérico, 17, independentemente do número inicialmente pensado. Parece, portanto, uma questão tecnológica (por que se chega ao mesmo resultado independentemente do número pensado?), que não se explica com as técnicas aritméticas da OM inicial.

A resolução desses problemas leva à identificação de um primeiro estágio de algebrização quando é necessário considerar o PCA como um todo, isto é, produzir uma formulação (simbólica) escrita do PCA que é, em certo sentido, uma expressão algébrica. Em seguida, surgirá a necessidade de novas técnicas, essencialmente, da "simplificação" delas para se trabalhar com uma expressão algébrica definida como a formulação simbólica de um PCA que, em geral, pode ser utilizada para modelar o processo de resolução de um problema de aritmética e a sua estrutura.

Por “simplificar um PCA” entende-se a operação de transformá-lo em um equivalente e, em certo sentido, mais “simples” ou “adaptado” para uso em uma atividade matemática específica.

Os primeiros passos de algebrização, assim incorporada em uma nova OM, que denominamos M_1, pode ser interpretado como um primeiro modelo do sistema inicial, e permite a modelagem dos elementos aritméticos. O modelo M_1 é uma expansão real de S, conforme podemos ver na Figura 03.

Figura 03: Primeira fase do processo de algebrização.



Fonte: Adaptada de Ruiz, Bosch, Gascón (2010, p. 661)

Com efeito, M_1 permite também resolver os problemas do mesmo tipo P_0, mas eles não podem ser abordados estritamente em S porque requerem um primeiro trabalho de simplificação associada PCA antes de aplicar o padrão análise-síntese.

Para exemplificar, consideremos o mesmo problema que P_1:

> P_1: Pense em um número, adicione em dobro o seu consecutivo, adicione15 ao resultado e, finalmente, subtraia o triplo do número pensado inicialmente. Que resultado se obtém? O que acontece caso se troque o número pensado inicialmente?

Para resolver o problema deve-se operar com variável (simplificação da expressão simbólica), mas não transpor termos, porque a variável está em uma extremidade da equação: $n + 2(n + 1) + 15 - 3n = f(n) = 17$.

Nesse contexto, o n não é um número desconhecido (incógnita) que precisa ser determinado nas condições do problema, mas uma variável que pode assumir diferentes valores. Para cada valor dado, se terá uma equação $f(n) = 17$.

Passamos agora a descrever a segunda fase do processo de algebrização.

Segunda fase do processo de algebrização

Nessa segunda fase da algebrização, identifica-se a necessidade de combinação de dois PCA, o que requer novas técnicas, as técnicas de cancelamento, desde que se tenha que manipular uma igualdade de dois PCA como um novo objeto matemático (equação). Ou seja, essas técnicas destinam-se à obtenção de "equações equivalentes", e não apenas como aconteceu com o PCA, equivalentes características de simplificação técnica de M_1. Assim, além de aumentar o nível de algebrização, surge um segundo modelo M_2, amplo e completo, de M_1.

> P_2: Paula pensou em um número. Adicionou o dobro do seu consecutivo, subtraiu 17 do resultado e, finalmente, dividiu tudo por 3. Se o resultado é 4 unidades a mais do que o dobro do número pensado, pode-se determinar o número que Paula pensou?

Empregando as técnicas apresentadas acima, podemos realizar os seguintes procedimentos:

Seja n o número pensado, o cálculo feito por Paula se dará da seguinte maneira:

PCA(n) = $n + 2(n + 1) - 17 = 3n - 15$

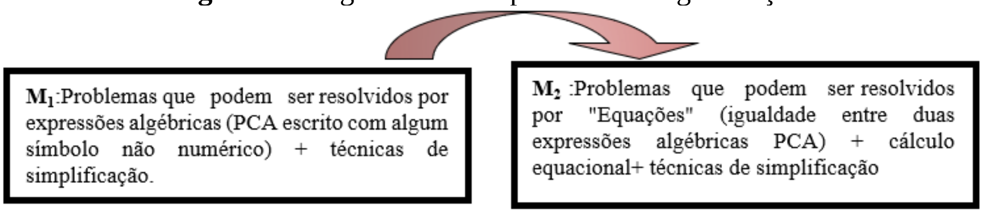
Nesse caso, como resultado da execução do PCA, nenhuma resposta será obtida por meio da aplicação de padrões de análise-síntese. A condição do problema é expressa como igualdade entre dois programas de cálculo $PCA_1(n) = 3n - 15$ e $PCA_2(n) = 2n + 4$ (supostamente) que detém algum valor de n.

Para determinar o valor de n entre dois PCA, a fim de que tenham o mesmo valor numérico, não é suficiente simplificar separadamente cada um dos PCA (na verdade, nesse caso, já são simplificados) e, em seguida, aplicar o padrão de análise-síntese. Então, necessita-se transformar globalmente a igualdade geral dos PCA, que está a lidar com este novo objeto matemático. Isso requer a transformação da igualdade em nível global dos PCA, ou seja, precisa-se manipular esse novo objeto matemático denominado "equação" de novas técnicas que constituem "cálculo equacional" e cuja principal operação é a "restauração" (al-jabr), que deu origem à palavra álgebra e consiste em transformar simultaneamente os PCA (ambos membros da equação) para a obtenção de uma nova equação (igualdade dos PCA) equivalente à anterior, como descrito abaixo.

$$
\begin{gathered}
3n - 15 = 2n + 4 \\
3n - 15 + 15 = 2n + 4 + 15 \\
3n = 2n + 19 \\
3n - 2n = 2n + 19 - 2n \\
n = 19
\end{gathered}
$$

Desse modo, pode-se ver que o cálculo equacional, que transforma equações em equações equivalentes, constitui-se em torno de técnicas M_1, sendo que, por um lado, continua a utilizar as técnicas para simplificar M_1 para simplificar os dois PCA em separado, porque o padrão análise-síntese transforma de um nível elementar uma igualdade de PCA em outra igualdade de PCA, conforme podemos ver na Figura 04.

Figura 04: Segunda fase do processo de algebrização.



Fonte: Adaptada de Ruiz, Bosch e Gascón (2010, p. 664)

A seguir, delineamos a terceira fase do processo de algebrização.

Terceira fase do processo de algebrização

Depois de uma breve apresentação dos dois primeiros processos de algebrização, precisamos registrar que a terceira fase constitui-se em considerar as questões tecnológicas que não podem ser resolvidas por M_2. Um possível questionamento poderia ser o seguinte: Que relação deve estar entre determinadas variáveis do sistema, de modo que atenda determinada propriedade dele? Por exemplo, que relação deve existir entre dados de um problema aritmético de modo que ele tenha uma solução? Como se deve proceder para tornar essa a única solução? Dependendo da natureza do problema e do contexto em que é feito, essas questões podem se multiplicar.

> P_3: Qual é a relação entre a medida do perímetro P e a de uma área de um triângulo isósceles? Quando é que P e A determinam um único triângulo isósceles?

Chamando b o comprimento desigual e a o lado dos iguais, o perímetro P e A área do triângulo são

$$p = 2a + b; a = \left(\frac{p-b}{2}\right)$$

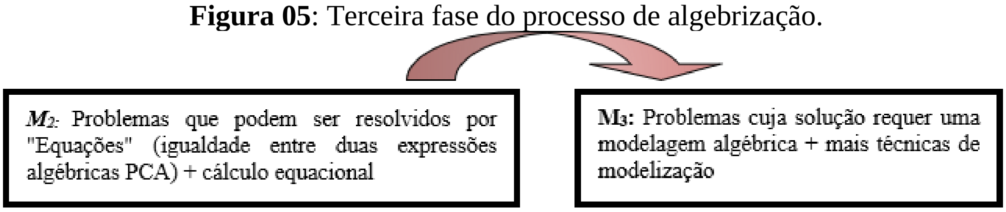
$$A - \frac{1}{2} b \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{4}}$$

Substituindo e simplificando a relação, tem-se, de acordo com o parâmetro b,

$$16A^2 = P^2 b^2 - 2\mathrm{PABb}^3$$

Temos, em suma, uma nova OM, que é designada por M_3, que contém o M_2 e constitui uma complementação dela. Ao mesmo tempo, ela deve ser considerada como uma ou mais algebrizações, desde que se aceite a unificação dos tipos de problemas, elementos técnicos e tecnológicos, incluindo tarefas relacionadas à interpretação dos resultados obtidos e até mesmo os tipos de problemas cada vez mais independentes dos sistemas iniciais, conforme podemos ver na Figura 05

Figura 05: Terceira fase do processo de algebrização.



Fonte: Adaptada de Ruiz, Bosch e Gascón (2010, p. 666)

Em resumo, Ruiz-Munzón, Bosch e Gascón (2010) mostraram como um instrumento algébrico pode ser utilizado para levar a cabo um processo de algebrização progressiva de um sistema. Essa abordagem também mostra que a "razão de ser" da álgebra escolar não apenas permite simplificar extremamente o "puro" (discurso) por solução de cálculo aritmético equacional. Além disso, os autores mostraram como a álgebra pode ser uma ferramenta de modelagem para organizar em conjunto problemas aparentemente diferentes, recebendo novos tipos de problemas, proporcionando técnicas para responder aos problemas tecnológicos, como mostram, por exemplo, propriedades da estrutura de uma classe de problemas.

Equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita

O estudo de equações do primeiro grau com uma incógnita baseia-se na estrutura algébrica denominada anel dos polinômios. Esse anel é simbolizado usualmente por $\mathbb{R}\,[x]$, em que $\mathbb{R}$ representa o corpo dos números reais e consiste das expressões formais $p(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$, sendo n assume um número natural. Nesse número, definem-se as operações de adição de dois polinômios e de multiplicação de um polinômio por um número real, as quais, supõe-se, satisfazerem as propriedades expressas nas regras usuais da álgebra elementar.

A operação de adição de dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ tais que $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ e $q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$, é definida por:

$p(x) + q(x) = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)$+$(b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n)$=$(a_0 + b_{0'}) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n$, e satisfaz as seguintes propriedades:

Para todo $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ pertencem a $\mathbb{R}[x]$,

a) $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$
b) $[p(x) + q(x)] + r(x) = q(x) + [p(x) + r(x)]$
c) $p(x) + 0(x) = 0(x) + p(x)$, em que $0(x)$ representa um polinômio nulo $0_0 + 0x + \ldots + 0x^n$, $n \in \mathbb{N}$
d) Para todo $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ existe o polinômio $p'(x)$ tal que$p(x) + p'(x) = 0(x)$.

Sabe-se que $p'(x) = (-a_0) + (-a_1)x + \ldots + (-a_n)x^n$.

A operação de multiplicação de um número real k por um polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ é definida por:

$kp(x) = (\mathrm{ka}_0) + (\mathrm{ka}_1)x + \ldots + (\mathrm{ka}_n)x^n$ e satisfaz as seguintes propriedades:

Para todo $k, k_{1,}k_2 \in \mathbb{R}$ e $p(x)_,$ e $q(x)\mathbb{R}[x]$,

a) $k[p(x) + q(x)] = \mathrm{kp}(x) + \mathrm{kq}(x)$
b) $k_1[k_2 p(x)] = (k_1 k_2)p(x)$
c) $1p(x) = p(x)$

O polinômio, assim definido, tem grau n se $a_n \neq 0$. No caso em que $n = 1$, dizemos que $p(x) = a_0 + a_1 x$ tem grau 1. Nesse caso, $p(x)$ é denominado polinômio do primeiro grau na indeterminada x.

Por outro lado, para cada polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$, é possível definir uma função polinomial $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indicada por $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$. A função assim definida associa a cada número $k \in \mathbb{R}$ em $f(k) \in \mathbb{R}$.

Se existe um número $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(k) = 0$, dizemos que k é raiz ou zero de $f(x)$. Nesse caso, para determinar as raízes do polinômio, é necessário determinar os valores de $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$, ou seja, resolver a equação $a_n x^n + \ldots + a_0 = 0$. Essa última igualdade é denominada de equação polinomial de grau n. No caso em que $n = 1$, temos uma equação polinomial do primeiro grau ($a_0 + a_1x = 0$), que é o nosso objeto de estudo. Os números reais assumidos por α tais que $f(\alpha) = 0$, são denominadas soluções da equação $f(x) = 0$.

Com base nas definições anteriores, denomina-se equação do primeiro grau toda equação na forma a$x + b = 0$, em que a incógnita possui expoente 1. A equação do primeiro grau é chamada linear, pois a sua representação gráfica é uma linha reta.

As operações e propriedades dos polinômios enunciadas anteriormente nos permitem ainda elaborar os seguintes princípios que fundamentam a resolução de uma dada equação:

- Princípio aditivo: se adicionarmos a cada ambo membro (por exemplo, $x + 4 = 2x - 1$ antes da igualdade, chamamos de 1° membro e após a igualdade de segundo membro) de uma equação um mesmo número ou uma mesma expressão algébrica, obteremos uma equação equivalente a primeira.
- Princípio multiplicativo: se multiplicarmos a cada membro de uma equação pelo mesmo número (diferente de zero) ou uma mesma expressão algébrica (não nula), obteremos uma equação equivalente a primeira.

Os dois princípios acima são utilizados na elaboração de técnicas para resolver, por exemplo, equações polinomiais do primeiro grau. Tendo discorrido sobre os elementos que compõem uma equação polinomial do primeiro grau, apresentaremos no próximo subtópico a modelização *a priori*.

Chevallard (1994) classifica os procedimentos de resoluções de equações do primeiro grau em duas categorias: (1) equações do tipo $ax + b = c$, que podem ser resolvidas por procedimentos aritméticos e (2) equações do tipo $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$, que não podem ser resolvidas por procedimentos que se apoiem especificamente em operações aritméticas. Nessa definição, x é a incógnita e com $a_1 \neq 0$.

No entanto, nem sempre as equações polinomiais do primeiro grau apresentam-se escritas nas formas simplificadas. Frequentemente, numa atividade, elas aparecem sob diferentes formas, dentre as quais destacamos outras duas categorias: equações dos tipos $A(x) = c$ e $A_1(x) = A_2(x)$, em que $A(x)$, $A_1(x)$ e $A_2(x)$ são expressões polinomiais, na variável x, que ainda não foram reduzidas à forma canônica $ax + b$, e $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, mas que podem ser reduzidas a essa forma por processo de desenvolvimento e redução.

Portanto, para esse estudo, classificamos e caracterizamos a priori os seguintes subtipos de tarefas relativos à resolução de equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita, no campo do $\mathbb{R}$, em quatro categorias: (1) resolver uma equação do tipo $ax + b = c$ (T_1), como por exemplo, $2x + 2 = 6$; (2) resolver uma equação do tipo $A(x) = c$, sendo $A(x)$ uma expressão polinomial não reduzida à forma (T_2), por exemplo, $2(x + 1) + x = 15$ (3) resolver uma equação do tipo $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$ (T_3), por exemplo, $2x - 3 = x + 12$; (4) resolver uma equação do tipo $A_1(x) = A_2(x)$, sendo $A_1(x)$ e $A_2(x)$, expressões polinomiais não reduzidas à forma canônica (T_4), por exemplo, $2(x - 1) + x = x + 10$.

Para resolver tais subtipos de tarefas foram identificadas e categorizadas, a priori, as seguintes técnicas (τ): a) Testar a igualdade (τ_{TI}), por tentativas e erros; b) Transpor termos ou coeficientes (τ_{TTC}), invertendo as operações; c) Neutralizar termos ou coeficientes (τ_{NTC}), efetuando a mesma operação nos dois membros da igualdade; d) Reagrupar os termos semelhantes (τ_{RTS}), invertendo o sinal dos termos transpostos.

Além dessas técnicas próprias de resoluções de equações, para os casos dos subtipos de tarefas T_2 e T_4, temos também a seguinte técnica: e) Desenvolver ou reduzir expressões (τ_{DRE}), eliminando parênteses e/ou agrupando termos semelhantes. Enfim, dependendo das variáveis mobilizadas na construção das equações, podemos mobilizar uma ou mais técnicas, dando origem às técnicas mistas.

Para justificar as técnicas caracterizadas acima para resolver equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita, foram identificadas e caracterizadas, *a priori*, as seguintes tecnologias: a) Princípios de equivalência entre equações: equações com as mesmas soluções ou raízes (θ_{PPE}); b) Princípio aditivo: quando aos dois membros de uma equação se adiciona (ou deles se subtrai) a mesma quantidade, obtém-se uma nova equação equivalente à primeira; c) Princípio multiplicativo: quando aos dois membros de uma equação se multiplica (ou deles se divide) a mesma quantidade (diferente de zero), obtém-se uma nova equação equivalente à primeira; d) Propriedades das operações inversas em $\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais) ou leis da transposição de termos (θ_{POI}): 1) Se a, b, c são números reais tais que a + b = c, então a = c-b; 2) Se a, b e c são números reais tais que a.b=c, então a = c ÷ b, b $\neq$ 0; 3) Propriedades gerais da igualdade (θ_{PGI}) ou lei do cancelamento: 1) Se $a + b = a + c \Leftrightarrow b = c$; 2) Se $a.b = a.c \Leftrightarrow b = c$ com $a \neq 0$, 3) Propriedades distributivas (θ_{PDM}): Se k, a, b, c e d assumem números reais, então $k(a + b) = ka + kb$ e $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Por fim, Ribeiro (2007) discutiu algumas considerações a respeito dos diferentes significados do conceito de equações do primeiro grau denominados por ele de multissiginificados de equação, considerando os aspectos epistemológicos e didático-matemáticos. Para tanto, esses multisignificados de equação serão descritos de forma breve a seguir:

a) Intuitivo-pragmático: o conceito de equação é concebido como intuitivo, ligado a uma ideia de igualdade entre duas quantidades, utilizado na resolução de problemas práticos;

b) Dedutivo geométrico: o conceito de equação é ligado às figuras geométricas e o seu uso está relacionado a situações que envolvem cálculos e operações em medidas de entes geométricos;

Estrutural-generalista: o conceito de equação é estrutural, definido e com propriedades e características próprias, buscando-se operar sobre ele mesmo, na busca de soluções mais gerais para uma classe de equações do mesmo tipo;

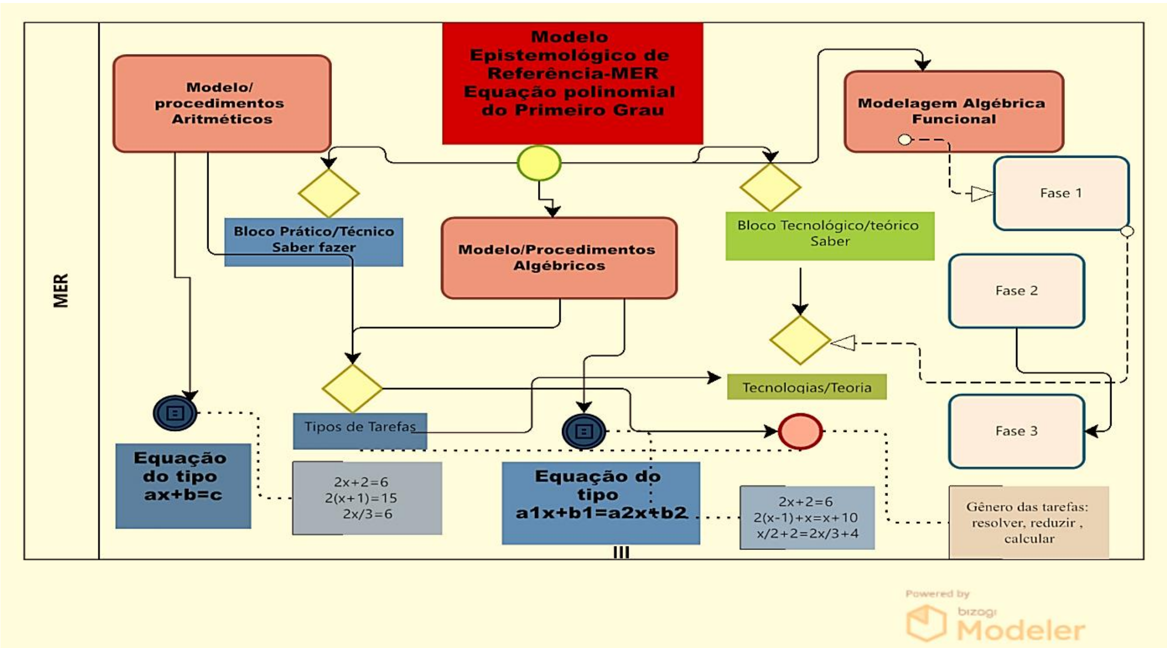
d) Estrutural-conjuntista: o conceito de equação é concebido dentro de uma perspectiva estrutural, diretamente ligado à noção de conjunto;

e) Processual-tecnicista: o conceito de equação é concebido a partir de sua própria resolução, como os métodos e técnicas que são utilizados para resolvê-la;

f) Axiomático-postulacional: o conceito de equação é concebido como uma noção primitiva, usada no mesmo sentido que reta, ponto e plano na geometria.

Resumimos na Figura 06 as diferentes fases de algebrização de uma organização matemática em torno de problemas aritméticos e as caracterizações das equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita. As articulações entre essas duas organizações matemáticas constituem o nosso MER, cuja construção é apresentada na álgebra elementar como modelagem de processos e o seu possível desenvolvimento no sentido de modelagem funcional.

Figura 06 – Modelo Epistemológico de Referência- MER



Fonte: Construção dos autores

Mediante os construtos da TAD e do nosso MER, empreendemos uma análise econômico-institucional dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), dos Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio do Estado de Pernambuco PC-PE (PERNAMBUCO, 2012), a Base Nacional Comum Curricular- BNCC (BRASIL, 2018) e de três livros didáticos.

Estudo econômico-institucional

Diante do exposto acima, avaliaremos três propostas curriculares de ensino: os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998), os Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio do Estado de Pernambuco PC-PE (PERNAMBUCO, 2012) e a Base Nacional Comum Curricular- BNCC (BRASIL, 2018) para identificar o que preconizam para o ensino de equação polinomial do primeiro grau. Em seguida, analisaremos três livros didáticos do sétimo ano: *Tempo de Matemática*; *Matemática* e *Praticando Matemática.* Apresentamos um comparativo das praxeologias matemáticas em termos de subtipos de tarefas, técnicas (saber fazer) e tecnologias (saber), bem como os modelos epistemológicos vigentes nestes livros.

No Quadro 1, apresentamos o resumo das informações identificadas, de forma mais ou menos explícita, da praxeologia regional existente nos PCN para o ensino da Álgebra no terceiro ciclo do ensino fundamental.

Quadro 1: Praxeologia matemática existente sobre equação polinomial do primeiro grau no PCN

Tipos de tarefas	Técnicas	Tecnologias
• Calcular o valor numérico de expressões algébricas.	(não explicita)	• Propriedade das operações numéricas.
• Traduzir sentenças matemáticas da linguagem usual para a forma algébrica.	(não explicita)	(não explicita)

Fonte: Brasil (1998)

Segundo este documento, ainda nesse ciclo (6º e 7º ano) devem ser desenvolvidas tarefas no sentido de permitir aos estudantes compreender a noção de variável e reconhecer a expressão algébrica como uma forma de demonstrar relações existentes entre variação de duas grandezas, modelização, resolução de problemas (aritmeticamente difíceis) e representação de problemas por meio de equações.

O segundo documento analisado foi "os Parâmetros Curriculares" de Pernambuco (PC/PE). Especificamente em relação ao ciclo (6º e 7º ano) referente às equações polinomiais do primeiro grau, esse documento traz as seguintes diretrizes:

> As equações de primeiro grau devem aparecer de forma natural, não como um objeto de estudo em si mesmo, mas como uma representação de um determinado problema a ser resolvido. Assim, cabe ao professor elaborar situações em que, cada vez mais, os procedimentos aritméticos sejam considerados pouco econômicos para resolvê-las, levando os estudantes à necessidade de estabelecer outros processos. É preciso, porém, levar em consideração que a passagem acima referida não se dá na forma de uma ruptura, pois há estudantes que sistematicamente buscam procedimentos aritméticos, sempre que é possível (PERNAMBUCO, 2012, p. 102).

No quadro 2, registramos o resumo das informações identificadas, de forma mais ou menos explícita, da praxeologia regional existente nos PC/PE para o ensino da álgebra no terceiro ciclo do ensino fundamental.

Quadro 2: Praxeologia matemática existente sobre equação polinomial do primeiro grau nos PC/PE

Tipos de tarefas	Técnicas	Tecnologias
• Resolver problemas de partilha e de transformação.	Transpor de termos ou coeficientes.	Propriedade das operações inversas
• Traduzir sentenças matemáticas da linguagem usual para a forma algébrica.	(não explicita).	Princípio de equivalência

Fonte: Pernambuco (2012)

Destacamos ainda que no PC/PE em relação ao PCN para a matemática dos anos finais do ensino fundamental, são propostos quatro blocos: Números e Operações; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas; Tratamento da Informação. Enquanto, o PC/PE está dividido em cinco eixos: Geometria, Estatística e Probabilidade, Álgebra e Funções, Grandezas e Medidas; Números e Operações.

A Base Nacional Comum Curricular- BNCC (BRASIL, 2018) é constituída de cinco unidades temáticas, a saber: Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas; Probabilidade e Estatística. Especificamente em relação unidade temática da Álgebra referente às equações polinomiais do primeiro grau, esse documento traz as seguintes diretrizes:

> É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos (BRASIL, 2018, p. 271).

No Quadro 3, registramos o resumo das informações identificadas, de forma mais ou menos explícita, da praxeologia regional existente na BNCC para o ensino da álgebra no terceiro ciclo (6º e 7º ano) do Ensino Fundamental.

Quadro 3: Praxeologia matemática existente sobre equação polinomial do primeiro grau nos BNCC

Tipos de tarefas	Técnicas	Tecnologias

Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.	(não explicita)	(não explicita)
Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de primeiro grau, redutíveis à forma ax + b = c.	(não explicita)	propriedades da igualdade

Fonte: Brasil (2018)

Em relação à razão de ser das equações polinomiais do primeiro grau dos três livros didáticos, destacamos que no livro *Tempo de Matemática*:

> A noção de equação é introduzida com a ideia de equilibro. Para tanto, é proposta a atividade de resolução de equações com balança. São dados problemas de resolução de equações, visando a passagem da linguagem da língua materna para a linguagem algébrica (NAME, 2010, p.15).

A pertinência ou razão de ser do segundo livro *Matemática* está relacionada com o tipo de tarefa "resolver equações do primeiro grau". Os termos e aplicações são procedimentos técnicos e a interligação dos temas para resolução de problemas das equações e o seu domínio na álgebra e funções.

A razão de ser das equações polinomiais do primeiro grau é demarcada no livro didático de Andrini (2012) em termos de aplicações para resolução de problemas das equações.

No quadro 04, apresentamos uma síntese da comparação à luz das praxeologias matemáticas relativas à resolução de equações polinomiais do primeiro grau. A análise deste quadro nos permitiu identificar as organizações matemáticas pontuais relativas aos livros didáticos:

Quadro 04: Comparativo das técnicas e tecnologia nos três livros

Subtipo de tarefas	***Matemática***		***Tempo de Matemática***		***Praticando Matemática***	
	Técnica	Tecnologia	Técnica	Tecnologia	Técnica	Tecnologia
T1: $ax+b=c$	τ_{TTC}[6]	θ_{POI}[7]	τ_{NTC} τ_{TTC}	θ_{PGI} θ_{POI}	τ_{TTC}	θ_{POI}
T2: $A(x)=c$	Não explicita		Não explicita		τ_{DRE_TTC}	θ_{PDM}
T3: $a_1x+b_1=a_2x+b_2$	τ_{NTC}[8]	θ_{PGI}[9]	τ_{NTC}	θ_{PGI}	τ_{NTC}	θ_{PGI}
T4: $A_1(x)=A_2(x)$	τ_{DRE_NTC}[10]	$\theta_{PDM}\_\theta_{PGI}$[11]	τ_{DRE_NTC}	$\theta_{PDM}\_\theta_{PGI}$	$\tau_{ED\_DRE\_TTC}$[12]	$\theta_{PDM}\_\theta_{PGI}$

Fonte: Dados da pesquisa

[6] Técnica de Transpor Termos e Coeficientes
[7] Propriedades das operações inversas
[8] Técnicas de Neutralizar Termos e Coeficientes
[9] Propriedades gerais da igualdade
[10] Desenvolver ou reduzir expressões/ Técnicas de Neutralizar Termos e Coeficientes
[11] Propriedades distributivas multiplicativas/Propriedades gerais da igualdade
[12] Eliminar denominadores/Desenvolver ou reduzir expressões/ Técnica de Transpor Termos e Coeficientes

Percebemos que os três livros apresentam propostas diferentes para o ensino de equações polinomiais do primeiro grau em relação à tarefa t_1: Resolver a equação dada por $2x + 8 = 17$. Quanto à técnica de transpor termos e coeficientes, nos livros *Matemática* e *Praticando Matemática*, os autores adotam a mesma sequência para essa tarefa, mas no livro *Tempo de Matemática*, o autor propõe trabalhar com as técnicas de neutralizar termos e coeficientes e transpor termos e coeficientes (método prático).

Com relação à tarefa t_2: Resolver a equação dada por $x + 2(x + 3) = 60$, apenas o livro *Praticando Matemática* fez a explicitação dessa tarefa e de uma técnica mista: desenvolver ou reduzir expressões para transformar em seguida, transpor termos e coeficientes. Já com relação à tarefa t_3: Resolver a equação dada por $5x - 8 = 2x + 6$, os três livros apresentam a mesma sequência e as mesmas técnicas apoiando-se nas propriedades gerais da igualdade. No que concerne à tarefa t_4: Resolver a equação dada por $2(2x - 1) = 2(x + 1)$, os livros *Matemática* e *Tempo de Matemática* apresentam a mesma sequência de tarefa, enquanto o livro *Praticando Matemática* trabalhou com denominadores para cumprir essa tarefa. Quanto às tecnologias, as propriedades distributivas da multiplicação e propriedades gerais da igualdade foram utilizadas pelos autores dos três livros para justificar as técnicas empregadas.

A tabela 1 apresenta a quantidade de tarefas que encontramos nos diferentes livros didáticos.

Tabela 1: Quantidade de subtipos de tarefas identificados em cada livro analisado

Subtipos de Tarefas	***Tempo de Matemática***					**Matemática**					**Praticando Matemática**				
	T_1	**T_2**	**T_3**	**T_4**	**%**	**T_1**	**T_2**	**T_3**	**T_4**	**%**	**T_1**	**T_2**	**T_3**	**T_4**	**%**
t_{TTC}	52	-	-	-	38	12	-	-	-	32	47	-	-	-	43
$t_{DRE\_}\ t_{TTC}$	-	12	-	-	9	-	04	-	-	10	-	22	-	-	21
t_{NTC}	-	-	09	-	6	-	-	6	-	16	-	-	10	-	9
$t_{DRE\_\ NTC}$	-	-	-	65	47	-	-	-	16	42	-	-	-	29	27

Fonte: Dados da pesquisa

Em relação ao modelo dominante nos três livros didáticos, percebemos que nos livros *Tempo de Matemática* e *Matemática*, os autores concentraram-se nas tarefas do tipo T_4 (quase 50% de tarefas sugeridas para o trabalho docente em sala de aula), ou seja, priorizaram o trabalho com os procedimentos de resoluções de equações que não podem ser resolvidas por procedimentos que se apoiem em raciocínio exclusivamente aritmético. Já o livro *Praticando Matemática* tem como modelo dominante as tarefas do tipo T_1 (equação do tipo $ax + b = c$), com 44% de proposições referentes às equações que podem ser resolvidas por meio de procedimentos aritméticos para o trabalho em sala.

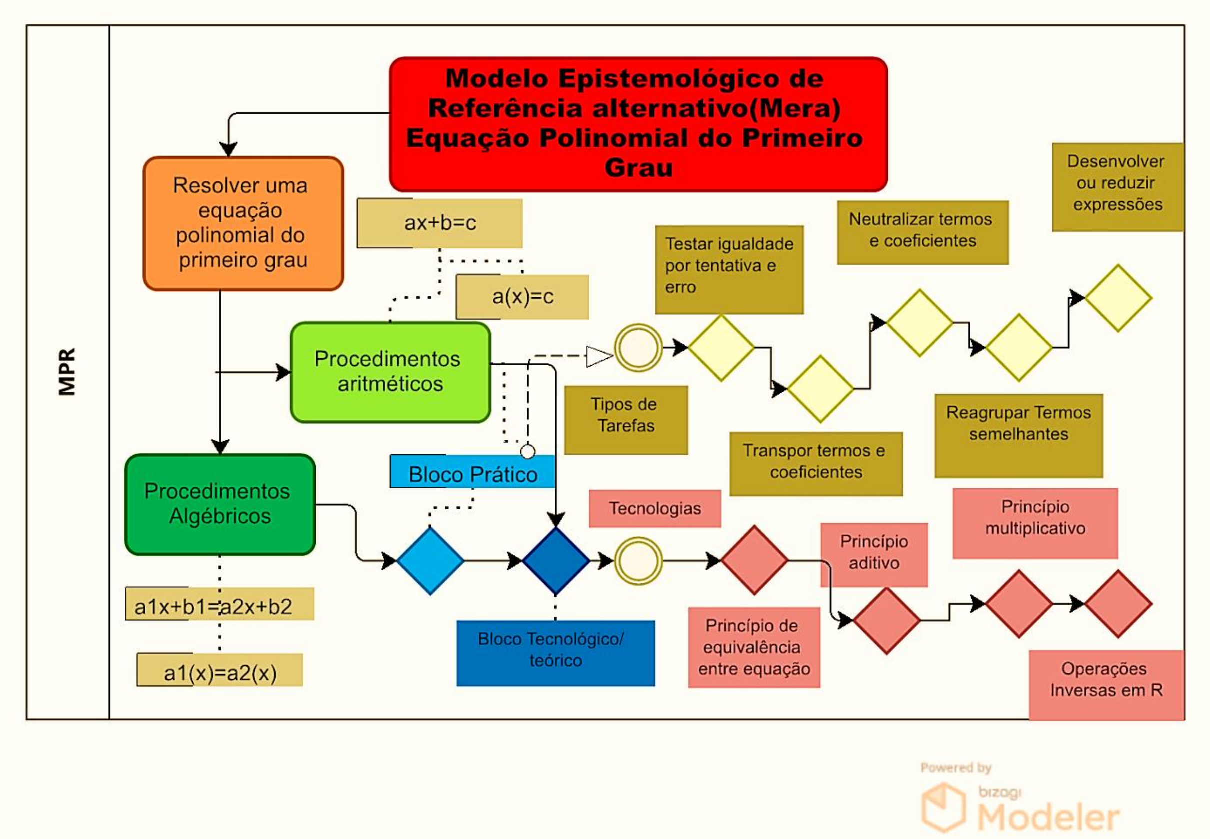
No tocante às tecnologias (propriedades distributivas da multiplicação e propriedades gerais da igualdade), verificamos que os três livros se assemelham. No que concerne às relações institucionais, os resultados obtidos a partir das análises dos documentos oficiais e de livros didáticos indicam que nos PCN o ensino da álgebra não tem destaque como um domínio próprio do conhecimento matemático, estando no domínio "números e operações". Enquanto, nos PC/PE, o ensino da álgebra está no domínio da "álgebra e funções".

A análise econômico-institucional permite destacar os seguintes resultados: as relações pessoais e institucionais dos professores (BARBOSA, 2017) com o objeto equação polinomial do primeiro grau compuseram-se de um conjunto de praxeologias, ou equipamento praxeológico (EP(x)) (CHEVALLARD, 2007) que sustentam a organização das tarefas e técnicas e tecnologia de crescente complexidade (FONSECA, 2004), que foram tornadas rotineiras e problematizadas em sala de aula.

Com relação ao modelo dominante nos três livros didáticos analisados, percebemos que em dois livros os autores concentraram-se na tarefa T_4 $2(2x-1)=2(x+1)$, e priorizaram o trabalho com os procedimentos de resoluções de equações que não podem ser resolvidas por procedimentos que se apoiem em raciocínio exclusivamente *aritméticos*. Já o terceiro livro tem como modelo dominante na tarefa T_1 $(x+3=5)$, referentes às equações que podem ser resolvidas por meio de procedimentos aritméticos para o trabalho em sala.

Diante do descompasso entre o nosso MER e os modelos dominantes nas diferentes instituições analisadas, apresentamos uma proposta de um modelo praxeológico de referência (MPR) (Figura 07) que tem um potencial para desenvolver um PEP: o ensino de equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita.

Figura 07: Modelo praxeológico de referência (MPR)



Fonte: Inspirado em Barbosa (2017)

Após apresentação dos elementos que constituem o nosso MER (Figura 7) - Processo de algebrização de problemas aritméticos e caracterização de equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita -, e o estudo da dimensão econômico-institucional, sugerimos um modelo praxeológico de referência (MPR), que sustenta a nossa proposta de percurso de estudo e pesquisa para a formação de professores. Além dos elementos oriundos do nosso MER, o MPR (Figura 8) agrega alguns elementos oriundos dos resultados das análises de algumas obras, como os PCN, PCPE, BNCC e livros didáticos. A caracterização das OM a ensinar advém dos tipos de tarefas institucionais, dos livros didáticos e dos programas curriculares.

O MPR proposto tem o intuito de minimizar o descompasso entre o nosso MER e os modelos dominantes nas diferentes instituições analisadas. Na próxima seção, apresentamos uma proposta de PEP-FP em que inferimos que ele tem um potencial para contribuir para a formação de professores no que diz respeito às organizações matemáticas e didáticas de equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita

Diferentes autores (França, Brasil, Espanha, Argentina, entre outros países) utilizam o PEP ou PEP-FP como recurso metodológico. Barquero, Bosch e Gascón (2011), por exemplo, argumentam que um PEP tem o seu início a partir do estudo de uma questão Q_0 com intensa capacidade geradora, apropriada para colaborar com o aparecimento de outras questões derivadas. Para tanto, é imprescindível a construção de ferramentas matemáticas (tarefas, técnicas, conceitos, propriedades, entre outras). Esse modelo metodológico retoma as relações questões e respostas, origem da construção do saber científico e, particularmente, no nosso caso, as atividades matemáticas relacionadas com as equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita.

Com a finalidade de sugerir uma proposta utilizando o PEP/ PEP-FP, é necessário a construção de um modelo epistemológico de referência (Figura 7) direcionado para o estudo de equação polinomial do primeiro grau, trazendo elementos básicos para a sua composição. Destacamos neste momento que a metodologia para o desenvolvimento da proposta (Figura 8) é a da engenharia didática do tipo PEP, que representa um modelo na proposição de uma questão inicial aberta, que tem um potencial para provocar novas questões, ou seja, diferentes itinerários que permitem discutir a questão inicial para obter uma resposta.

O sistema didático no qual esta proposta se situa é voltado para a Educação Básica ou para formação docente, e a provocação didática incide em objetar aos seguintes questionamentos: Q_0: Como ensinar equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita?

Barquero e Bosch (2015) asseveram que esta metodologia possui 4 fases: a primeira é designada análise praxeológica ou análises preliminares e inclui um questionamento epistemológico do saber matemático em cena. Nessa fase desenvolvemos os estudos das dimensões epistemológica, econômica e ecológica do problema didático em jogo e, como consequência destes estudos, foram produzidos o modelo epistemológico de referência, o modelo epistemológico dominante (MED) e modelo praxeológico de referência (MPR). O MPR foi construído em torno dos procedimentos aritméticos e algébricos relacionados com a algebrização de problemas aritméticos, mas também em torno das caracterizações das equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita. Para isso, o documento foi formado pela composição de dois modelos:

- M_1 – Procedimentos aritméticos - equação polinomial do primeiro grau tipo $ax+b=c$, que podem ser resolvidas por procedimentos aritméticos; $a_1 \neq 0$, como por exemplo, $2x+2=6$; ou, $2(x+1)+x=15$;
- M_2 – Procedimentos Algébricos - equação polinomial do primeiro grau do tipo $a_1x+b_1=a_2x+b_2$, que não podem ser resolvidas por procedimentos que se apoiem especificamente em operações aritméticas. Nessa definição, x é a incógnita e com $a_1 \neq 0$. por exemplo, $2x-3=x+12$; ou $2(x-1)+x=x+10$.

Ainda temos, a algebrização de uma OM em torno de problemas aritméticos e a modelização algébrica funcional constituída de três fases.

Na segunda fase, ainda de acordo com Barquero e Bosch (2015), deve ser feita uma análise *a priori* e o planejamento matemático e didático da proposta de intervenção (PEP-FP).

Nesta perspectiva, esperamos que a equação polinomial do primeiro grau com uma incógnita seja definida da seguinte forma: equação do tipo $ax+b=c, a \neq 0$ em que a incógnita possui expoente um (1). Baseado no estudo de Barbosa (2017), as equações deste tipo podem ser classificadas em duas categorias. Além do tipo de equações supracitadas (que podem ser resolvidas por procedimentos aritméticos), temos as equações do tipo $a_1x+\ b_1=\ a_2x+ b_2$ que não podem ser resolvidas por procedimentos aritméticos exclusivamente.

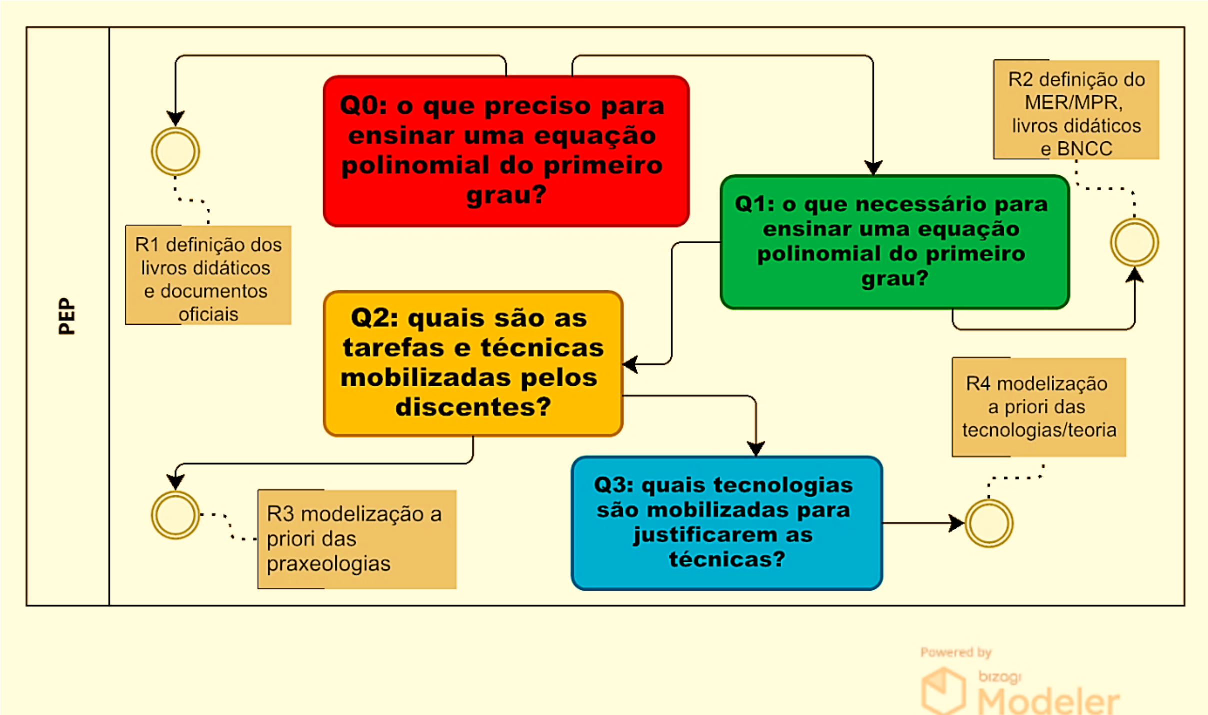
Mas sabe-se que nem sempre as equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita são escritas nas formas simplificadas. Elas podem aparecer em uma tarefa nas seguintes formas $A(x)=c\ e\ A_1(x)=\ A_2(x)$ em que $A(x), A_1(x)\ e\ A_2(x)$ são expressões polinomiais que não foram dadas na forma canônica $ax+b=0$, mas podem ser reduzidas a essa forma por processo de desenvolvimento e redução (ARAÚJO, 2009).

Na terceira fase: aplicação do experimento em um grupo de professores em formação de educação básica em formação inicial ou continuada.

Neste contexto voltado para a formação docente, apoiamo-nos em Ruiz Olarria (2015) que concebe um PEP-FP a partir de uma questão geratriz Q_0-FP, composto de cinco módulos (M_0, M_1, M_2, M_3, M_4).

Módulo M_0: Tornar explicitas as razões de Ser do PEP-FP, em nosso caso, partimos da questão Q_0-FP: Como ensinar uma equação polinomial do primeiro grau com uma incógnita? (Figura 08)

Figura 08: Percurso de estudo e pesquisa - PEP



Fonte: Dados da pesquisa

Espera-se colocar em interação os elementos do sistema didático S (X, Y, $\boldsymbol{Q}$.), X sendo uma equipe constituída por um grupo de docentes em formação inicial ou continuada, cujos membros são indicados por x, com uma instância de ajuda indicada por Y (docentes formadores, pesquisadores de um grupo de cientistas, entre outros). A finalidade principal de constituir este sistema é analisar a questão $\boldsymbol{Q}$.

Para tanto, o trabalho almejado pelos elementos de X sob a supervisão ou direção de Y é produzir uma resposta *R* para a questão $\boldsymbol{Q}$, representado assim: S (X; Y; $\boldsymbol{Q}$) $\hookrightarrow$ *R*. Nessa dinâmica de organizar resposta ***R*,** os sujeitos x em formação devem mobilizar os saberes antigos e novos, na maioria das vezes, apoiadas em obras *O* (livros textos, periódicos, dissertações, teses, e-books, entre outros) para produzir respostas as questões geradas da questão geratriz Q: R_1, ..., R_n (CHEVALLARD, 2001). As obras *O* e as resposta R_i compõem um *milieu*[13] para elaboração de $R^{\heartsuit}$; denotado como se segue: $[S(X;Y;\boldsymbol{Q}) \rightarrow M] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$.

Em resumo, Chevallard faz uso do "esquema herbatiano[14]." $[S(X;Y;Q) \rightarrow M] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$, partindo, da constituição do *milieu* didático desenvolvido por: $[S(X;Y;Q) \rightarrow \{R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, \ldots, R_n^{\Diamond}, O_{n+1}, \ldots, O_m\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$. Isto é, $M = \{R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, \ldots, R_n^{\Diamond}, O_{n+1}, \ldots, O_m\}$. As respostas $R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, \ldots, R_n^{\Diamond}$, *são*

[13] A tradução de *milieu*, no contexto brasileiro, é "meio", mas a interpretação e noção de um *milieu*, na didática da matemática francesa é mais extenso, ultrapassando a compreensão e significado desta definição.
[14] Em homenagem ao filosofo alemão Johann Friedrich Herbart.

respostas “marcadas”, “autenticadas” por instituições que podem ser: o livro didático, e-book, entre outros. Em relação às “obras” $O_{n+1},\ldots,O_m$ são as teorias, montagem simples, praxeologias que espera-se serem utilizáveis para desfazer respostas $R^{\lozenge}$ e retirar nestas respostas, possivelmente, materiais e arquitetar novas respostas ou não em R aneladas que precisam considerar determinadas restrições *a priori*, sendo a seguinte notação, $S(X;Y;Q)\hookrightarrow R^{\heartsuit}$ Chevallard (2011, 2018).

Módulo M_1: Viver um PEP

Ao vivenciar este módulo, os docentes precisam desempenhar as funções como discentes em um PEP apresentado, como respostas aceitáveis de Q_0. Para tanto, temos como objetivo neste módulo que o docente conheça o que é um PEP e construa praxeologias matemáticas e didáticas em torno da epistemologia das equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita e seu ensino.

Espera-se também que a questão geratriz de nosso PEP estabeleça os cinco gestos principais do percurso de estudo que são: observar, analisar, aferir as respostas em $R^{\lozenge}$, desenvolver, e logo após, anunciar e defender a resposta $R^{\heartsuit}$. Além do mais, espera-se a mobilização de algumas das dialéticas fundamentais definidas por Chevallard (2001, 2007, 2009), como a dialética de estudo e pesquisa, a dialética de perguntas e respostas, a dialética do indivíduo e do coletivo, a dialética de análise (praxeológica e didática) e síntese (praxeológica e didática), a dialética da descrição textual e inscrição textual (caracterizada em leitura e escrita) etc.

Esses gestos e dialéticas devem constituir alavancas para o surgimento de questionamentos relacionados com a nossa questão geratriz, tais como: Por que se deve ensinar uma equação polinomial do primeiro grau com uma incógnita? Qual é a razão de ser de uma equação polinomial do primeiro grau com uma incógnita na matemática escolar? Quais são as sugestões de ensino sobre equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita? O que é se compreende sobre equação deste tipo? Quais são os procedimentos que podem ser acionados na resolução de equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita? Quais são as tecnologias que justificam esses procedimentos? Quais são os problemas que surgem quando se ensina na Educação básica as equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita? Como enfrentá-los? Quais são os problemas que surgem quando se aprende no ensino básico as equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita? Quais são as praxeologias matemático-didáticas construir para enfrentar tais problemas?

Módulo M_2: Analisar o PEP vivido

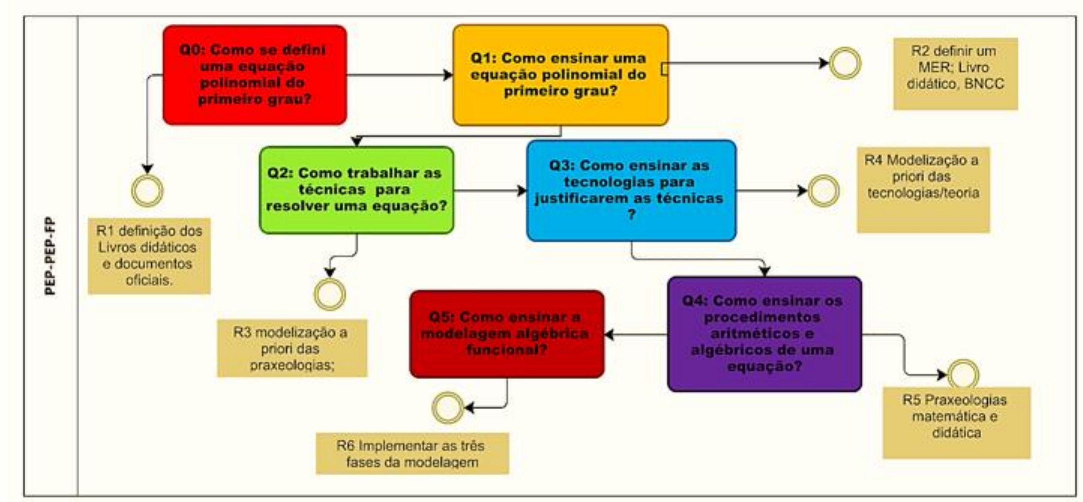
Após ter realizado o PEP no M_1, almeja-se que o docente avalie as tarefas em conformidade com a praxeológica, didática e econômica, destacando o problema das condições e limitações expostas na implementação desse dispositivo de ensino nas instituições escolares.

Módulo M_3: Desenho de um PEP

Nesse ínterim, o docente precisa esboçar o PEP para um grupo exclusivo de discentes, e para tal fim presumir que o trabalho dos módulos anteriores (M_0, M_1, M_2) foi considerado, bem como as suas restrições institucionais. Espera-se que haja propostas de PEP conforme proposto na Figura 09, podendo ser vivenciado no contexto escolar (educação básica) ou em formação continuada.

Para tanto, para construir um modelo praxeológico de referência, os professores podem buscar respostas às seguintes questões iniciais para o ensino de equações polinomial do primeiro grau com uma incógnita. Assim, a pergunta inicial é: Q_0: Como ensinar uma equação polinomial do primeiro grau com uma incógnita? Q_1: O que é uma equação polinomial do primeiro grau com uma incógnita? Q_2: Quais são os procedimentos que podem ser acionados na resolução de equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita? Quais são as tecnologias que justificam esses procedimentos? Q_3: Como trabalhar as tarefas e as técnicas do bloco saber fazer equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita? Q_4: “Como ensinar as tecnologias e teoria do bloco saber? Q_5: Como ensinar os procedimentos aritméticos e algébricos envolvidos na resolução de equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita? Q_6: Como ensinar o procedimento algébrico funcional? Etc.

Figura 09: Modelo praxeológico de referência para um PEP



Fonte: Dados da pesquisa

Essas questões (e outras que podem ser construídas pelos professores) podem ser respondidas a partir do *milieu* didático $M = \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \ldots, R_n^{\lozenge}, O_{n+1}, \ldots, O_m\}$ construído no M_2, acrescido de elementos oriundos do estudo de outras obras como livros didáticos, documentos oficiais (BNCC e os documentos oficiais regionais), teses e dissertações sobre a temática etc.

Módulo M_4: Gerenciar e experimentar um PEP

O propósito neste módulo é o auxílio docente ao embrenhar-se no esboço para delineamento do PEP, bem como na coleta dos problemas para gerenciar os empecilhos e obstáculos que possam manifestar-se na aplicação do PEP na sala de aula.

Na quarta fase da metodologia, o objetivo é realizar a análise *a posteriori* do PEP. Esta análise consiste na comparação da análise *a priori*, que pode ser as análises *a priori* dos documentos oficiais e livros didáticos, e das achados da fase experimental.

Considerações Finais

Discutimos aqui uma proposta de um dispositivo didático denominado percurso de estudo e de pesquisa (PEP/ PEP-FP), que está fundamentado, teoricamente, no campo da Didática da Matemática, e tem a Teoria Antropológica do Didático a sua base conceitual.

A utilização do PEP requer mudanças na prática docente e, consequentemente, nas ações dos alunos em sala de aula. Essas mudanças tendem a promover rupturas no processo didático que envolve professor-alunos-saber. O papel do professor em incluir tipos de tarefas diferentes que envolvam técnicas diferentes, partindo de uma organização pontual para uma local, de uma local para regional e de regional para global, pode favorecer uma ampliação do conceito trabalhado, mobilizando mais de uma técnica e mais de uma tecnologia. Por fim, nesse contexto, o PEP-FP também contribuirá para formação inicial e continuada dos docentes que atuam ou atuarão no palco da sala de aula.

Pesquisar a partir da perspectiva da TAD apresenta várias possibilidades de percursos de investigação no que diz respeito as questões intrínsecas às praxeologias matemáticas propriamente ditas e as questões intrínsecas às praxeologias didáticas, relativas à formação de professores (ALMOULOUD *et al*., 2021). Por esta razão, propusemos um dispositivo didático (PEP-FP) por meio do qual o professor de ensino básico poderia ter acesso a uma visão não apenas ampliada, mas regulada/ajustada pelos três princípios estruturantes do PEP e as dez dialéticas fundamentais, de como estudar e ensinar equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita.

Nesse sentido, o sistema didático S (X, Y, Q) se configura como desencadeador de estudo e pesquisa da questão geratriz Q_0-FP. Nessa dinâmica de investigação, os três princípios, os cinco gestos (observar, analisar, avaliar as respostas $R^{\lozenge}$, desenvolver, em seguida, divulgar e defender a resposta $R^{\heartsuit}$) e as dez dialéticas fundamentais alicerçam o desenvolvimento do PEP-FP (ALMOULOUD *et al*., 2021).

Referências

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Editora UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. A., NUNES, José Messildo Viana, PEREIRA, José Carlos De Souza, FIGUEROA, Teodora Pinheiro. Percurso de estudo e pesquisa como metodologia de pesquisa e de formação. **REVASF**, Petrolina- Pernambuco - Brasil, vol. 11, n.24, p.427-467, 2021. *In*: https://www.periodicos.univasf.edu.br/index.php/revasf/article/view/1538/1008. Acesso em: 10/11/2021

ALMOULOUD, S. A.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A**. A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos**. São Paulo: CRV, 2018. p. 31-50.

ARAÚJO, A. J. O ensino de álgebra no Brasil e na França: estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático. 2009. 292 f. **Tese** (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009. Disponível em: http://repositorio.ufpe.br/bitstream/handle/123456789/3947/arquivo3433_1.pdf?sequence=1&isAllowed=y . Acesso em: 10/11/2020.

BARBOSA, E.J.T. Praxeologia do Professor: Análise comparativa com os documentos oficiais e do livro didático no ensino de equações polinomiais do primeiro grau, 242 f. **Tese** (Doutorado em Ciências e Matemática) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2017.

BARQUERO, B.; BOSCH, M. (2015). Didactic engineering as a research methodology: From fundamental situations to study and research paths. In *A.* **Wastson & M. Ohtani (Eds.), Task design in mathematics education** – ICMI Study 22(Springer I), pp. 249- 272.

BARQUERO, B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Ecología de la modelización matemática: los recorridos de estudio e investigación. In: BOSCH, M. et al. **Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico**: un panorama de la TAD. Barcelona: Centre de Recerca Matemática, 2011.

BOLEA, P. C. **El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares**. Tesis doctoral**.** Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza, 2002.

BOLEA, P. C.. El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares. **Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano**, 29. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza, 2003

BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los "talleres de prácticas matemáticas" a los "recorridos de estúdio e investigación"**. *In*: BOSCH, M.; GASCÓN, J. Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action. Montpellier: Université de Montpellier, 2010. p. 55-91

BOSCH, M. ; GASCON, J. La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier, A. et Margolinas, C. (Coord.), **Balises en Didactique des Mathématiques**, (pp. 107-122), La Pensée Sauvage: Grenoble, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª Séries) matemática.** Brasília, DF, 1998. 142 p.
BRASIL. Ministério da Educação. A Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

CHACON, A. M. A. **La gestion de la mémoire didactique par le professeur dans l'enseignement secondaire des mathématiques** : Etude du micro-cadre institutionnel en France et au Costa Rica. Thèse du Doctorat De L'université De Toulouse Délivré par l'Université Toulouse III – Paul Sabatier en Didactique des Disciplines Scientifiques et Technologiques Spécialité : Didactique Des Mathematiques. 2008.

CHEVALLARD, Y. **La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder***;* Clermont-Ferrand, 16-23 août 2009. Disponível em http://yves.chevallard.free.fr. Acesso em junho de 2021.

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : L'approche anthropologique. **Actes de l'U.E. de la Rochelle**, 1998.

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : L´approche antropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** Vol 19, nº 2, pp. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. Organiser l'étude 1. Structures et Fonctions, in Dorier, J – L. Et al (eds) **Actes de la 11ème Ecole d'ete de didactique des mathématiques** – corps –21–30 Aout 2001a, Grenoble: La Pensée Sauvage, pp 3–22.

CHEVALLARD, Y. Les TPE comme problème didactique. Communication au Séminaire National de Didactique des Mathématiques, 2001b, Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=14. a. Acesso em : 10/10/2020

CHEVALLARD, Y. Organiser l'étude 3. Écologie & régulation. *In* Dorier, J.-L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., Floris, R. (Eds.), **Actes de la 11° École d'Été de Didactique des Mathématiques**, Grenoble, France : La Pensée Sauvage, p. 41 – 56, 2002.

CHEVALLARD, Y. Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. Communication aux **3es Journées d'étude franco-québécoises** (Université René-Descartes Paris 5, 17-18 juin 2002). Paru dans S. Maury S. ; M. Caillot (éds), **Rapport au savoir et didactiques**, Éditions Fabert, Paris, p. 81-104, 2003.

CHEVALLARD, Y. Passé et présent de la Théorie Anthropologique de Didactique. *In* A. Estepa, L. Ruiz, F. J. García (Eds.), Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (pp. 705-746). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2007.

CHEVALLARD, Y. Les problématiques de la recherche en didactique à la lumière de la TAD. **Séminaire de l'ACADIS**, 2011. Disponível em http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=208. Acesso em : 10/11/2021

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, **Recherches en Didactique des Mathématiques** – Grenoble : La Pensée Sauvage, p.73-111, 1992

CHEVALLARD, Y. Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique. 1994. Disponível em: Acesso em: 10 set. 2021.

CHEVALLARD, Y. Le passage de l'arithmetique a l'algebre dans l'enseignement des mathematiques au college. Deuxieme partie. *In*: **Petit x** n° 19, IREM de Grenoble, pp.43-75, 1989.

CHEVALLARD, Y (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. **Journées de didactique comparée**. *In* http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Vers_une_didactique_de_la_cod isciplinarite.pdf. Acesso em 15/09/2021

CHEVALLARD, Y. A teoria antropológica do didático face ao professor de matemática. *In*. FONSECA, C. (2004), Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Enseñaza Secundaria y la Enseñaza Universitaria. **Tesis Doctoral**. Departamento de Matemática Aplicada I. Universidad de Vigo, 2004.

GARCÍA, F. J. La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales. **Tesis Doctoral** (no publicada). Universidad de Jaén, 2005.

GASCÓN, J. Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. **Recherches en didactique des mathématiques**, 13(3), 295-332, 1993.

GASCÓN, J. Del Problem Solving a los Recorridos de Estudio e Investigación. Crónica del viaje colectivo de una comunidad científica. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática** (UNIÓN), n. 22, p. 9-35, 2010

GASCÓN, J. Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. **Educación Matemática**, Ciudad de Mexico, p. 99-123, marzo, 2014. Disponível em: https://www.redalyc.org/pdf/405/40540854006.pdf. Acesso em: 15/10/2021

KAPUT, J. (2005) **Teaching and learning a new algebra with understanding**. Documento retirado de http://www.simcalc.umassd.edu/downloads/KaputAlgUnd.pdf em 22 de janeiro de 2014.

KIERAN, C. Learning and teaching Algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. *In* F.K. Lester, Jr., (Ed.), **Second Handbook of research on mathematics teaching and learning** (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing, 2007.

LUCAS, C. O. **Una posible <razón de ser > del cálculo diferencial elemental em el ámbito de la modelización funcional.** Departamento de Matemática Aplicada I. Programa de doctorado Técnicas Matemáticas Avanzadas y sus plicaciones. Vigo, 2015.

NCTM. **Princípios e normas para a Matemática escolar.** Lisboa: APM, 2007.

RIBEIRO, J. R. Equação e seus multisignificados no ensino de matemática: Contribuições de um estudo epistemológico. 2007. 141 p. **Tese** (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PUC/SP, São Paulo.

RUIZ-MUNZÓN, N. La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional. 2010. 2 v. **Tesis** (Doctoral en Matemáticas) – Departamento de Matemática, Universitat Autónoma de Barcelona, Barcelona, 2010.

RUIZ-MUNZÓN, N., BOSCH, M., GASCÓN, J. La algebrización de los programas de cáculo aritméticos y la introducción del álgebra en secundaria. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo; T.A Sierra, (Eds.), **Investigación en Educación Matemática** XIV (pp. 545-556. Lleida: SEIEM, 2010.

RUIZ-OLARRÍA, A. (2015). La Formación Matemático-Didáctica del Profesorado de Secundaria. De las Matemáticas por Enseñar a las Matemáticas para la Enseñanza. Tesis de Doctoral. Universidad Autónoma de Madrid. Madrid/ES.

SANTOS, A.B.C dos- Investigando epistemologias espontâneas de professores de matemática sobre o ensino de equações do primeiro grau. 2014. 124 f. **Dissertação** (mestrado em Educação matemática). Universidade Federal do Pará, Belém, PA, 2014

SIERRA, T. Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes continuas. Madrid: **Colección digital de tesis de la Universidad Complutense de Madrid**, 2006.

Recebido em: 17 de janeiro de 2022
Aprovado em: 27 de julho de 2022