revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ANÁLISE PRAXEOLÓGICA EM PROBLEMAS DE COMBINATÓRIA: UM ESTUDO A PARTIR DO PROBLEMA DO PONTO MAIS VISITADO

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2022.11.25.389-414

Rogério César dos Santos[1]
Cleyton Hércules Gontijo[2]

Resumo: O problema do ponto mais visitado insere-se no campo da Análise Combinatória e pode ser aplicado tanto na Educação Básica quanto na Superior. Este artigo tem por objetivo apresentar uma pesquisa, por meio do qual foram analisadas as produções de alunos de um curso de graduação quando apresentados ao problema do ponto mais visitado, em uma atividade guiada pela resolução de problemas. A base teórica que embasou a apreciação das informações produzidas pelos estudantes foi a Análise Praxeológica de Yves Chevallard. As análises levaram às seguintes conclusões: a resolução do problema do ponto mais visitado propiciou aos alunos da educação superior resgatarem e solidificarem seus conhecimentos em combinatória e em probabilidade; foi possível constatar que os alunos compreenderam a essência do problema do ponto mais visitado e compreenderam também as propriedades do Triângulo de Pascal que surgem a partir dele; por fim, concluiu-se que a análise praxeológica de Chevallard auxiliou o professor a entender mais profundamente em que patamar de conhecimentos em matemática os estudantes se encontram naquele momento.
Palavras-chave: 1. Análise praxeológica. 2. Problema do ponto mais visitado. 3. Ensino de Análise Combinatória. 4. Resolução de problemas.

PRAXEOLOGICAL ANALYSIS IN COMBINATORICS PROBLEMS: A STUDY FROM THE MOST VISITED POINT PROBLEM

Abstract: The problem of the most visited point falls within the field of Combinatorial Analysis and can be applied both in Basic and Higher Education. This article aims to present a research, through which the productions of students of an undergraduate course were analyzed when presented with the problem of the most visited point, in an activity guided by problem solving. The theoretical basis that supported the appreciation of the information produced by the students was the Praxeological Analysis of Yves Chevallard. The analyzes led to the following conclusions: solving the problem of the most visited point allowed higher education students to rescue and solidify their knowledge in combinatorics and probability; it was possible to verify that the students understood the essence of the problem of the most visited point and also understood the properties of Pascal's Triangle that arise from it; finally, it was concluded that Chevallard's praxeological analysis helped the teacher to understand more deeply at what level of knowledge in mathematics the students are at that moment.
Keywords: 1 Praxeological analysis. 2. Problem of the most visited point. 3. Teaching of Combinatorial Analysis. 4. Problem solving.

Introdução

A combinatória, segundo Kavousian (2008), é o estudo de maneiras de listar e organizar elementos de conjuntos discretos de acordo com regras especificadas. O autor lembra que ela é aplicada em diversos campos das ciências, como: teoria dos grafos, criptografia, teoria da

[1] Doutor em Educação pela Universidade de Brasília (UnB). Professor do *campus* Planaltina da Universidade de Brasília. E-mail: rogerc@unb.br – Orcid: http://orcid.org/0000-0002-1362-2234.
[2] Doutor em Psicologia pela Universidade de Brasília (UnB). Professor do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília (UnB). E-mail: cleyton@mat.unb.br - Orcid: https://orcid.org/0000-0001-6730-8243.

codificação, ciência da computação, pesquisa operacional (em itinerários de veículos, por exemplo), engenharia elétrica (certos problemas de rede), biologia molecular e química (em técnicas de enumeração de isômeros). A combinatória também é usada na própria matemática, como em: teoria da probabilidade, álgebra linear, teoria dos números e topologia. A combinatória apresenta, muitas vezes, problemas com enunciados simples cujas resoluções são não triviais. É necessário saber quando se deve somar, multiplicar, subtrair ou dividir.

Problemas combinatórios, de acordo com English (2005), facilitam processos de enumeração, auxiliam na formulação de conjecturas, de generalizações, são úteis ao estudo de mapeamentos, de classes de equivalência e ao desenvolvimento do pensamento sistemático. O autor cita o exemplo de que, para se determinar todas as combinações de roupas de um conjunto de camisas e calças de cores diferentes, é necessário combinar uma camisa com cada calça e, em seguida, repetir o processo com cada uma das camisas restantes, o que torna o trabalho mais eficiente se comparado à realização aleatoriamente.

Tópicos envolvendo o campo da combinatória estão presentes nos currículos de matemática desde o início do processo de escolarização. No Brasil, essa presença foi manifestada no Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997, 1998, 1999) que vigoram entre os anos de 1997 e 2017 e, também, na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), atual documento orientador das políticas curriculares do país. Os PCN incluíram a combinatória, de forma explícita, entre os objetivos gerais da matemática para o ensino fundamental, apontando que os estudantes devem desenvolver habilidades de fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos do ponto de vista do conhecimento e estabelecer o maior número possível de relações entre eles, utilizando para isso o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico); selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente (BRASIL, 1997, p. 37).

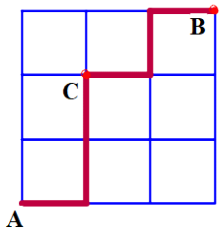
Por sua vez, a BNCC (BRASIL, 2018) também destaca elementos do campo da combinatória entre as competências específicas de matemática e suas tecnologias. Por exemplo, ao se referir ao ensino médio, aponta como uma das competências que os estudantes devem desenvolver:

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BRASIL, 2017, p. 523).

O desenvolvimento do raciocínio combinatório, segundo Pinto e Silva (2016, p. 676), "faz com que o aluno seja capaz de analisar situações, obter estratégias de resolução, encontrar possibilidades, além de desenvolver uma autonomia, sendo crítico e argumentativo". Para Pessoa e Borba (2010), para que essas habilidades se desenvolvam, o ensino de combinatória deve acontecer a partir da exploração de diversos contextos que favoreçam a compreensão dos fatos e tenham aplicações reais, de forma a estimular o estudante para o envolvimento com a tarefa e, consequentemente, apreender os conteúdos trabalhados.

A fim de colaborar com os estudos no campo da combinatória, relatamos nesse artigo uma pesquisa envolvendo a análise combinatória e a probabilidade junto a estudantes de graduação, tendo como elemento motivador a resolução do problema do ponto mais visitado (SANTOS; CASTILHO, 2013). O problema consiste em estabelecer por qual ponto do plano passam mais percursos em uma grade quadrangular N por N. Cada caminho deve sair do vértice inferior esquerdo A = (0,0) e chegar ao vértice oposto B = (N, N) por trajetórias que só podem dobrar para a direita ou para cima. A figura 1 a seguir ilustra um possível caminho passando, por exemplo, pelo ponto C, numa grade três por três ($N = 3$).

Figura 1. À procura do ponto mais atingido por caminhos de A a B.



Fonte: elaboração própria.

O problema do ponto mais visitado, aplicado aos graduandos nesta pesquisa, consiste então em descobrir o ponto pelo qual passam mais caminhos. Nota-se que pelo vértice superior esquerdo do quadrado passa apenas um único percurso, bem como pelo vértice inferior direito. Já pelo ponto C passa uma variedade maior de percursos possíveis. Desta forma, como a quantidade de caminhos é finita, deve existir um ponto, de coordenadas inteiras, pelo qual passam mais percursos. De fato, Santos e Castilho (2013) provaram que o ponto campeão em caminhos é o ponto localizado abaixo do ponto C, na figura 1. Isto é, considerando A = (0,0), o ponto mais visitado é o ponto (1,1), não importando a ordem do quadrado N por N. Os alunos foram convidados a fazerem esta descoberta através de exemplos em quadrados três por três e quatro por quatro. Os estudantes também foram convidados a associarem o problema do ponto mais visitado a algumas propriedades do triângulo de Pascal, demonstradas por Melo e Santos (2014), como consequências da resolução do problema do ponto mais visitado.

A base teórica utilizada para apreciar as informações produzidas pelos estudantes foi a Análise Praxeológica (CHEVALLARD, 1999). Essa teoria tem sido utilizada com diferentes propósitos, entre eles, para investigar elementos relativos à atuação docente (GONÇALVES, 2004; VERAS, 2010), para tratar das metodologias de ensino (SANTOS, 2010), para o estudo de documentos e diretrizes educacionais publicados pelo governo (GOULART, 2007; SILVA, 2007) e para analisar mudanças de abordagens de determinados conteúdos ao longo do tempo (NAKAMURA; 2008).

Podemos encontrar exemplos de uso da análise praxeológica em pesquisas envolvendo a combinatória, entre elas, a pesquisa de Pinheiro (2015), que analisou os conteúdos de análise combinatória ensinados em escolas brasileiras, no período 1895-2009, a partir dos livros didáticos utilizados. O autor revela que, nos primeiros livros didáticos, o enfoque era a dedução das fórmulas. Com o passar do tempo, foi inserida nas obras a tarefa de se realizar cálculos a partir destas fórmulas. Os assuntos que mais sofreram alteração quanto à abordagem foram permutação e arranjo, em detrimento da combinação. Ao longo do tempo, segundo o autor, a abordagem teoricista cedera lugar à abordagem tecnicista ou clássica para o ensino da análise combinatória. O autor analisou os livros didáticos segundo a Teoria Antropológica do Didático, tanto do ponto de vista matemático quanto didático.

As análises de Pinheiro (2015) corroboram aspectos apontados por Julianelli *et al*. (2009), que ao discutirem sobre o modelo de ensino relativo à Análise Combinatória, constataram que este tem seguido enfoques didáticos voltados integralmente ou quase integralmente para os aspectos estritamente matemáticos, desvinculados de suas conexões com a realidade natural ou social.

Neste artigo, a resolução de problemas foi a maneira pela qual a pesquisa foi executada, para o estudo do ponto mais visitado. O trabalho de Pinheiro (2015) e de Julianelli *et al*. (2009) reforçaram a necessidade de explorar tópicos de combinatória por meio de atividades centradas na resolução de problemas. Essa opção assenta-se nas potencialidades que a resolução de problemas possui no sentido de favorecer o protagonismo estudantil durante uma atividade. Nesse sentido, Gontijo (2020, p. 157), afirma que:

> A decisão sobre o tipo de método e/ou procedimento que será utilizado poderá ser tomada a partir dos conhecimentos e das experiências anteriores que os alunos apresentam, especialmente aqueles decorrentes do trabalho já desenvolvido para resolver problemas similares ou com os quais tiveram contato. Salientamos a necessidade de propiciar aos alunos a oportunidade de

> construírem os seus próprios modelos, testá-los para, então, chegar à solução. Será necessário também construir uma estratégia para comunicar aos colegas e ao professor a sua experiência de resolver o problema, explicando o processo mental utilizado e a forma como revisou as estratégias selecionadas para chegar à solução.

Assim sendo, pode-se dizer que a riqueza do trabalho com problemas está na organização mental do respondente na medida que é demandada a elaboração de estratégias, a testagem, a verificação, entre outros passos. Nesse sentido, dizemos que um problema se caracteriza como uma questão não trivial, não imediata, que exige do aluno uma busca maior de seus conhecimentos prévios para a sua resolução.

Problemas exigem tempo de preparação, criatividade, insight e organização (STERNBERG, 2008). A estratégia de resolução de problemas permite o trabalho com a intuição, a visualização, a dedução, a validação de processos, a capacidade de argumentar e de comunicar, pode despertar a criatividade e suscitar a autonomia do aluno, afinal, ele é levado a conectar diversos saberes para a resolução do problema (GONTIJO, 2007). Para isso, o papel do professor, na escolha do problema, é imprescindível em sala de aula. Cabe a ele selecionar aquele problema que, ao mesmo tempo que exige do aluno toda sua desenvoltura em matemática, proporciona estabelecer conexões com novos conhecimentos, novos conteúdos.

Pólya (1995) considerava quatro passos na resolução de um problema: compreensão do problema; estabelecimento de um plano; execução do plano; retrospecto. Na fase da compreensão faz-se a identificação das incógnitas e a plausibilidade dos dados postos. Na fase do planejamento, é necessário recuperar estratégias já utilizadas, bem como verificar se o problema pode ser particularizado, ilustrado, se pode ser resolvido por tentativa e erro, se há padrões, se é possível caminhar em sentido inverso etc. Na execução do plano, cada passo deve ser verificado. A fase do retrospecto é o momento da verificação dos resultados e suas compatibilidades com o enunciado, bem como da averiguação da possibilidade de se usar a estratégia em outras situações.

Para que se possa materializar uma aula com esta metodologia, podem se seguir os seguintes passos: proposição do problema à turma; leitura individual do mesmo; leitura em grupos; resolução do problema; acompanhamento e incentivo por parte do professor; anotação das diferentes soluções na lousa; discussão com a turma toda; busca de um consenso; formalização do conteúdo trabalhado com a inserção das definições e teoremas e, proposição de novos problemas (ONUCHIC, 2013).

Não se pode negligenciar, neste contexto, o poder do momento de incubação, aquele no qual o indivíduo encontra-se distraído, não pensando no problema que havia iniciado (HÉLIE;

SUN, 2010). Após esta pausa, ideias podem surgir mais facilmente para a resolução da questão, em uma alusão ao trabalho silencioso do inconsciente.

Naturalmente, a estratégia de resolução de problemas pode causar uma inibição inicial nos estudantes, até mesmo uma certa resistência. Porém, acredita-se que, com a usual prática, pode ocorrer de os alunos se adaptarem ao método de resolução de problemas como parte integrante das aulas.

Metodologia

A investigação apoiou-se na abordagem qualitativa de pesquisa (MINAYO, 2002), que, no campo da educação matemática, tem sido empregada nas análises dos processos de ensinar e de aprender, entre outros campos de pesquisa. Essa abordagem se mostrou apropriada para a investigação desenvolvida, pois, conforme apontou Garnica (2004), ela se caracteriza por:

> (a) [...] transitoriedade de seus resultados; (b) [...] impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) [...] não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) [...] constituição de suas compreensões [...] como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; e (e) [...] impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (p. 86).

Tomando por base as características apontadas por Garnica (2004), identificamos em nossa investigação: (a) a produção das informações pelos estudantes se deu num processo dinâmico, visto que podiam retomar a resolução do problema do ponto mais visitado em vários momentos, transitando entre ideias e construções, o que caracterizou a transitoriedade dos resultados; (b) considerando o caráter exploratório da resolução do problema do ponto mais visitado, não era possível, a *priori*, indicar padrões de respostas e comportamentos esperados por parte dos estudantes; (c) a participação ativa do pesquisador e dos estudantes na produção de informações, agindo ambos de forma interativa e dialógica, sinalizando a impossibilidade de neutralidade em todo o processo; (d) a produção de informações por parte dos estudantes, durante a resolução do problema do ponto mais visitado foi guiada e autorregulada por eles, reconfigurando-se suas compreensões; (e) o estudo aqui apresentado está circunscrito em um determinado contexto, e as interpretações dos resultados dizem respeito tão somente às condições nas quais a atividade foi desenvolvida.

A Análise Praxeológica foi considera apropriada para orientar as análises das informações produzidas, coerente com a abordagem qualitativa de pesquisa. Na Análise

Praxeológica, a 'práxis' corresponde à parte prática da resolução do problema e 'logos' à parte teórica que teoriza a prática utilizada pelo estudante na produção matemática (CHEVALLARD, 1999). Isto é, em cima das produções dos alunos, foi feita uma análise não somente do que foi produzido pelos alunos, mas também uma análise da teoria matemática que estava por trás das resoluções das atividades propostas na pesquisa de campo.

Na praxeologia de Chevallard, a dimensão prática é formada por duas componentes: a tarefa e a técnica: a tarefa é o enunciado da questão proposta, aquilo que se pede; a técnica é a operacionalização da resolução da questão. O campo lógico da praxeologia também é formado por duas componentes: a tecnologia e a teoria. A tecnologia explica através de uma argumentação lógica a técnica que está sendo usada na resolução do problema. A teoria explica de forma mais ampla esta tecnologia (BARBOSA; LIMA, 2014).

Podem-se notar os momentos nos quais estes conceitos aparecem durante a resolução de um problema: o momento em que o aluno toma contato com as tarefas dadas pelo universo matemático; o momento em que técnicas são mostradas para a execução das tarefas; o momento em que as técnicas são explicadas por um argumento lógico; o momento em que estas técnicas são aplicadas a outras tarefas; o momento da institucionalização do saber por meio de uma teoria global do assunto e, o momento da avaliação do processo (ALMOULOUD, 2007).

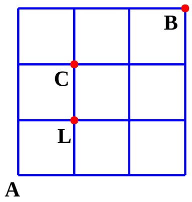
Para que fosse possível realizar a análise praxeológica em cima das produções dos alunos, o pesquisador, primeiro autor do presente artigo, solicitou autorização para que pudesse entrar em uma sala de aula de uma universidade pública brasileira, em uma turma de Estatística Básica de um curso de licenciatura, por um período de três dias letivos para a aplicação do problema do ponto mais visitado, no ano de 2018. A turma alvo da pesquisa era composta por seis alunos.

Na seção seguinte será descrita a atividade proposta, juntamente com a análise das produções dos alunos.

Resultados e análises

O problema do ponto mais visitado apresentado aos estudantes foi dividido em tarefas distribuídas em três dias de aplicação. No que segue, tem-se cada questão seguida das análises das respostas obtidas pela turma, organizadas por dia. Todas as perguntas foram antes explicadas pelo pesquisador aos alunos antes que pudessem respondê-las nas folhas entregues aos mesmos. Ao final de cada conjunto de tarefas, as respostas corretas eram dadas aos alunos, para que se pudesse passar para a próxima sequência de questões.

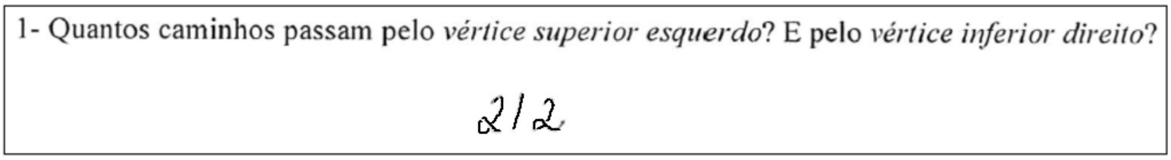
Figura 2. Figura base para as primeiras tarefas.



Fonte: elaboração própria.

Primeiro dia – tarefa 1: Determinar quantos percursos passam pelos vértices da grade da figura 2.

Figura 3 – Enunciado e resposta digitalizada de um dos alunos.


1- Quantos caminhos passam pelo *vértice superior esquerdo*? E pelo *vértice inferior direito*?

2/2

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador – imagem melhorada em computador.

Apenas dois dos seis alunos acertaram esta questão. A resposta correta é que um único percurso passa pelo vértice superior esquerdo, e um único percurso passa pelo ponto inferior direito. A figura 3 retrata a resposta equivocada de um dos estudantes: dois caminhos em cada vértice do quadrado. Segundo a análise praxeológica, todos os alunos executaram a tarefa por meio da técnica de contagem simples de caminhos na grade. A tecnologia que fundamenta a resposta dos alunos é o conceito de Plano Cartesiano, conteúdo integrante da teoria geral da Geometria Analítica

Os resultados mostram que a maioria dos estudantes não havia compreendido ainda as regras expostas pelo pesquisador a respeito dos caminhos: saída em A; chegada em B; cada passo pode ser dado apenas para cima ou para a direita; uma trajetória de A a B nestas condições forma um único caminho ou percurso. O objetivo desta primeira tarefa foi verificar o grau de entendimento dos estudantes quanto ao mecanismo de se traçar trajetórias na grade.

Primeiro dia – tarefa 2: Usando a intuição, dizer por qual ponto passam mais caminhos, comparando o ponto C com o ponto L da figura 2, na grade três por três.

Figura 4 – Enunciado e resposta digitalizada de um dos alunos.

revista
PARANAENSE
DE EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA

2- Antes de efetuar qualquer cálculo, pela sua intuição, por qual ponto você acha passam mais caminhos, o C, o L, ou não há diferença? Por quê?

mais ha diferença porque para chega no ponto B basicamente tem que passar pelo caminho C e L na mesma Quantidade.

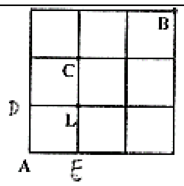
Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador.

Nenhum estudante respondeu corretamente, indicando que pelo ponto L passam mais caminhos do que pelo ponto C. Esperava-se que pudessem apresentar respostas plausíveis, ainda que não correta, explorando a própria intuição, pois, a visualização de itinerários parece ser comum no estabelecimento de rotas para transitar por diferentes espaços no mundo real. O objetivo era fazê-los ainda compreender aos poucos o mecanismo do problema do ponto mais visitado por percursos.

Segundo a análise praxeológica, todos os alunos executaram a tarefa por meio da técnica da visualização. O conceito de Plano Cartesiano foi a tecnologia utilizada e a Geometria Analítica a teoria aplicada na resolução. Os resultados mostram aos estudantes a necessidade de explorar a intuição matemática inicial com vistas a encontrar parâmetros plausíveis que pudessem aproximá-la da realidade.

Primeiro dia – tarefa 3: Usando a intuição, dizer por qual ponto mais caminhos dentre todos os pontos do quadrado (exceto A e B).

Figura 5 – Enunciado e resposta digitalizada de um dos alunos.



3- Sem calcular, usando sua intuição, por qual ou quais pontos você acha que passam mais caminhos, dentre todos os pontos possíveis? Por quê?

Pelos pontos E e D, pois através dele que se pode chegar aos outros caminhos.

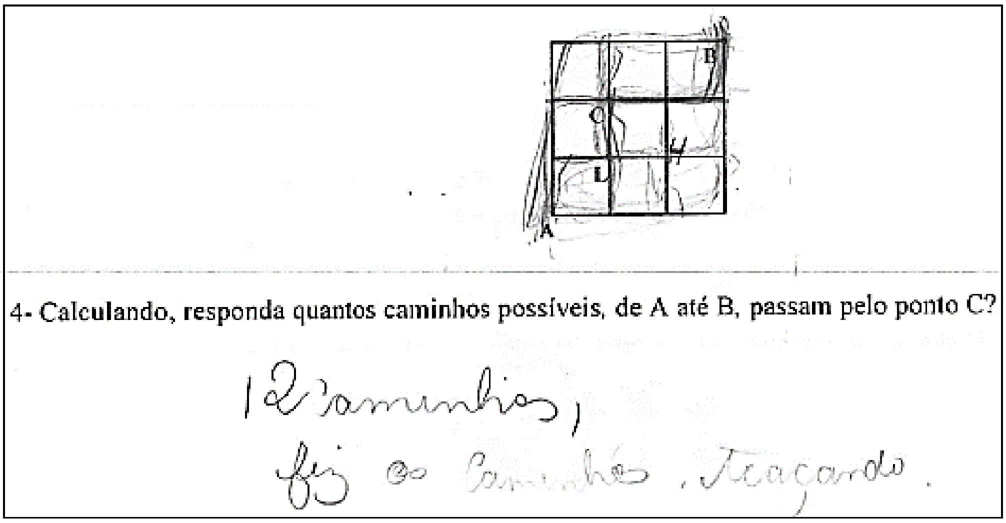
Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador.

Nenhum estudante respondeu corretamente, que pelo ponto L passam mais caminhos, dentre todos os pontos possíveis. Alguns escolheram os mesmos pontos do aluno retratado na figura 5, isto é, pelos pontos mais próximos de A (ou de B), talvez pelo fato de que metade dos caminhos passa por D e metade por E. Outros responderam que seria um dos pontos centrais do quadrado.

Segundo a análise praxeológica, todos os alunos executaram a tarefa por meio da técnica de visualização. A tecnologia que fundamenta a resposta dos alunos é o conceito de Plano Cartesiano e a teoria empregada foi a Geometria Analítica. Novamente, este era um item para trabalhar com a capacidade de visualização dos estudantes, explorando a sua intuição, e não era esperado que pudessem localizar o ponto mais visitado L sem uma contagem exata.

Primeiro dia – tarefa 4: Dizer exatamente quantos caminhos passam pelo ponto C

Figura 6 – Enunciado e resposta digitalizada de um dos alunos.



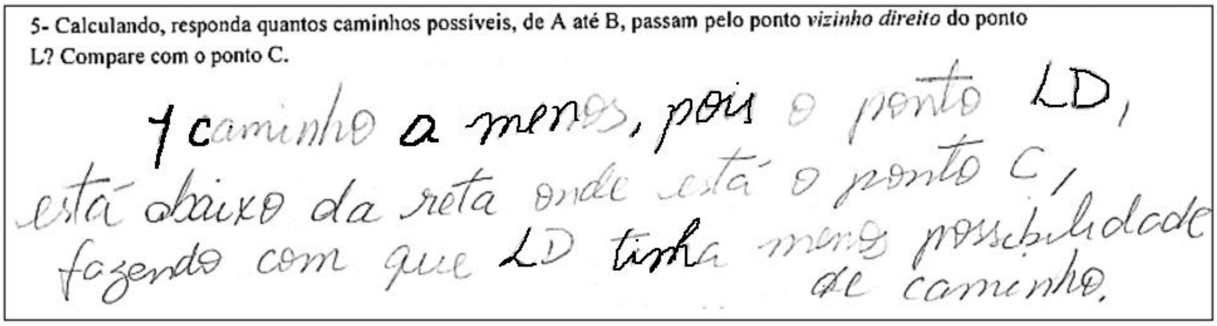
Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador.

Apenas um estudante respondeu corretamente, que pelo ponto C passam nove caminhos. Os demais tiveram dificuldades em traçar os caminhos.

Segundo a análise praxeológica, todos os alunos executaram a tarefa por meio da técnica da contagem de percursos. O conceito de Plano Cartesiano foi a tecnologia utilizada e a teoria aplicada foi a Geometria Analítica. O objetivo era fazê-los encontrar exatamente o número de caminhos que passam por um determinado ponto, pela técnica que surgir em suas mentes.

Primeiro dia – tarefa 5: Dizer exatamente quantos caminhos passam pelo ponto vizinho direito do ponto L da figura 2.

Figura 7 – Enunciado e resposta digitalizada de um dos alunos.


5- Calculando, responda quantos caminhos possíveis, de A até B, passam pelo ponto *vizinho direito* do ponto L? Compare com o ponto C.

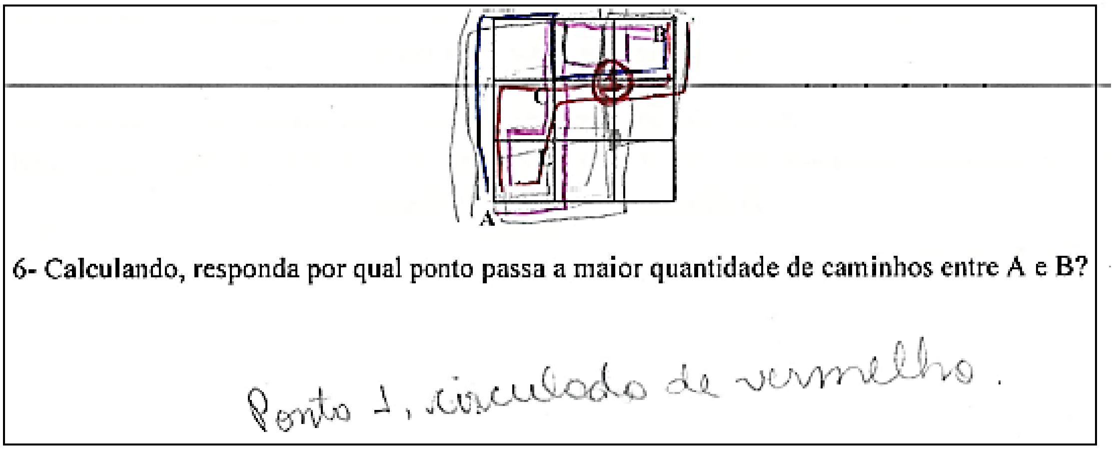
1 caminho a menos, pois o ponto LD, está abaixo da reta onde está o ponto C, fazendo com que LD tinha menos possibilidade de caminho.

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador – imagem melhorada em computador.

Novamente apenas um aluno dos seis respondeu corretamente, nove caminhos passam pelo ponto vizinho direito de L. Os demais erraram, como o da figura 7. Pela análise praxeológica os alunos resolveram esta tarefa pela técnica de contagem de caminhos. O objetivo era fazê-los observar que existem pontos pelos quais passam a mesma quantidade de caminhos, no caso, os pontos C e o vizinho direito de L.

Primeiro dia – tarefa 6: Dizer exatamente por qual ponto passam mais caminhos, dentre todos os possíveis.

Figura 8 – Enunciado e resposta digitalizada de um dos alunos.



6- Calculando, responda por qual ponto passa a maior quantidade de caminhos entre A e B?

Ponto 1, circulado de vermelho.

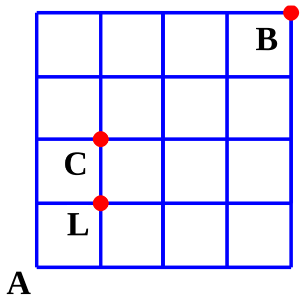
Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador.

Apenas um aluno respondeu corretamente, pelo ponto circulado em vermelho ilustrado na figura 8 anterior. A técnica para a execução desta tarefa foi a da contagem simples de trajetórias. O objetivo foi eles encontrarem, finalmente, qual é o ponto mais visitado por caminhos na grade três por três, a saber, o ponto L = (1,1) e o seu simétrico (2,2), como indicou o aluno da figura 8.

Neste instante o pesquisador forneceu no quadro as respostas de todas as tarefas anteriores, antes que se iniciasse o próximo momento.

As atividades seguintes, neste mesmo dia, se constituíram das mesmas perguntas das atividades anteriores, porém no quadrado quatro por quatro.

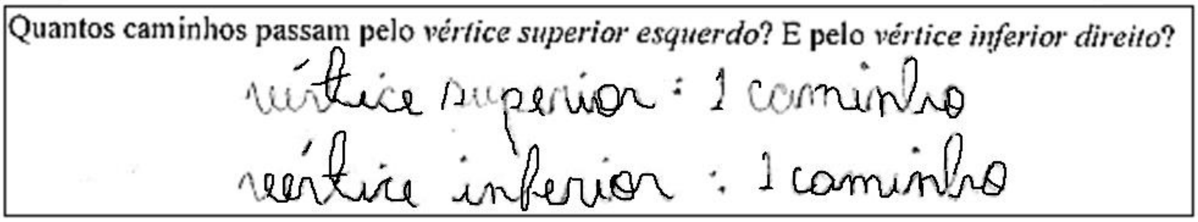
Figura 9 – Grade quatro por quatro.



Fonte: elaboração própria.

Primeiro dia – tarefa 7: Dizer exatamente quantos caminhos passam pelos vértices do quadrado, desta vez numa grade quatro por quatro.

Figura 10 – Enunciado e resposta digitalizada de um dos alunos



Quantos caminhos passam pelo *vértice superior esquerdo*? E pelo *vértice inferior direito*?

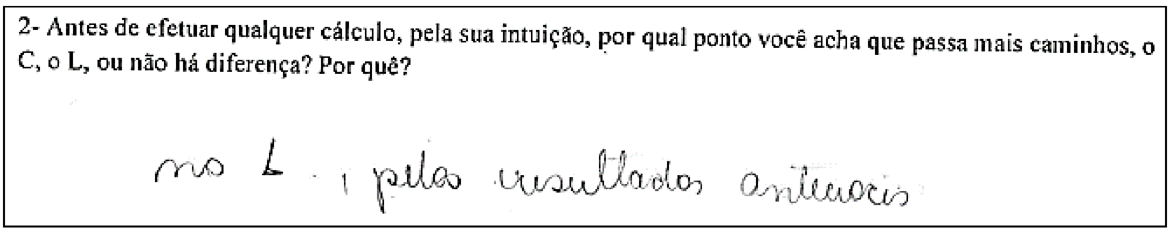
vértice superior : 1 caminho
vértice inferior : 1 caminho

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador – imagem melhorada em computador.

Todos os alunos responderam corretamente esta tarefa. A técnica utilizada fora a contagem simples de percursos.

Primeiro dia – tarefa 8: Usando a intuição, dizer por qual ponto mais caminhos, por C ou por L.

Figura 11 – Enunciado e resposta digitalizada de um dos alunos



2- Antes de efetuar qualquer cálculo, pela sua intuição, por qual ponto você acha que passa mais caminhos, o C, o L, ou não há diferença? Por quê?

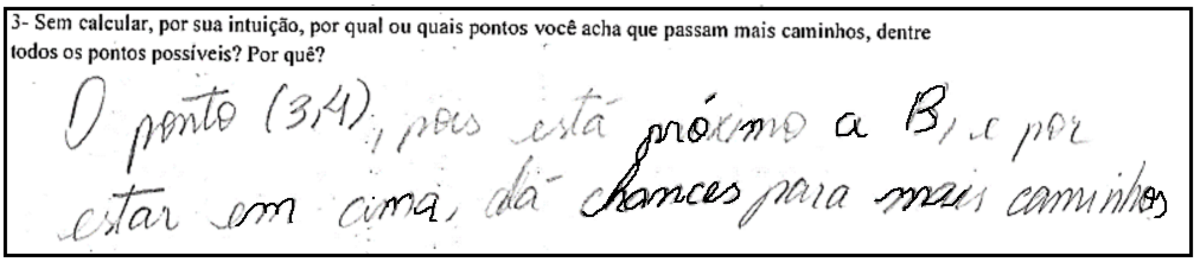
no L , pelos resultados anteriores

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador.

Exceto por um aluno, os cinco demais responderam corretamente, pelo L passam mais percursos que pelo ponto C. A técnica fora a visualização. O objetivo foi iniciar o processo de generalização do problema do ponto mais visitado para quadrados maiores.

Primeiro dia – tarefa 9: Usando a intuição, dizer por qual ponto mais caminhos, dentre todos os possíveis.

Figura 12 – Enunciado e resposta digitalizada de um dos alunos.


3- Sem calcular, por sua intuição, por qual ou quais pontos você acha que passam mais caminhos, dentre todos os pontos possíveis? Por quê?

O ponto (3,4), pois está próximo a B, e por estar em cima, dá chances para mais caminhos

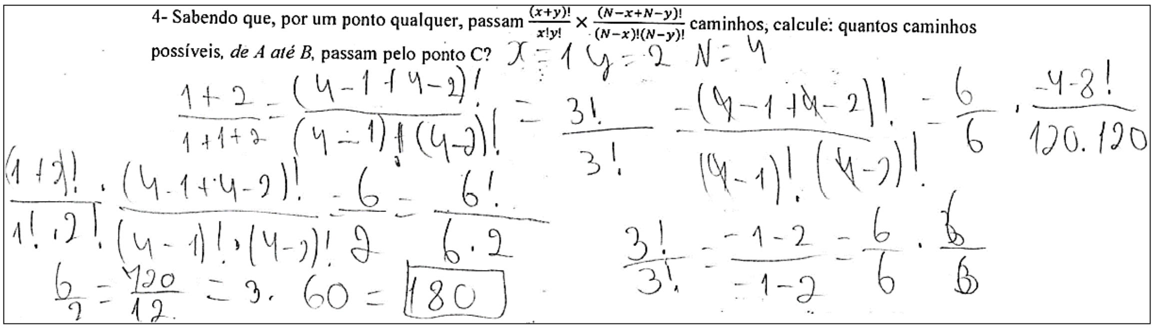
Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador – imagem melhorada em computador.

Três alunos responderam corretamente: o ponto L é o campeão de caminhos. Os demais responderam os pontos centrais do quadrado ou então os pontos vizinhos de A e de B, como foi o aluno retratado na Figura 12. A técnica fora a visualização.

Primeiro dia – tarefa 10: Calcular exatamente quantos caminhos passam pelo ponto C da figura 9 na grade quatro por quatro, através da fórmula que fornece o número de caminhos que passam por determinado ponto (x, y):

$$\frac{(x+y)!}{x!\,y!} \times \frac{(N-x+N-y)!}{(N-x)!\,(N-y)!} \text{caminhos.}$$

Figura 13 – Enunciado e resposta digitalizada de um dos alunos.


4- Sabendo que, por um ponto qualquer, passam $\frac{(x+y)!}{x!y!} \times \frac{(N-x+N-y)!}{(N-x)!(N-y)!}$ caminhos, calcule: quantos caminhos possíveis, *de A até B*, passam pelo ponto C?

$x = 1 \quad y = 2 \quad N = 4$

$\frac{(1+2)!}{1!\cdot 2!} \cdot \frac{(4-1+4-2)!}{(4-1)!\cdot(4-2)!} = \frac{6}{2} = \frac{6!}{6\cdot 2}$

$\frac{6}{2} = \frac{720}{12} = 3 \cdot 60 = \boxed{180}$

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador.

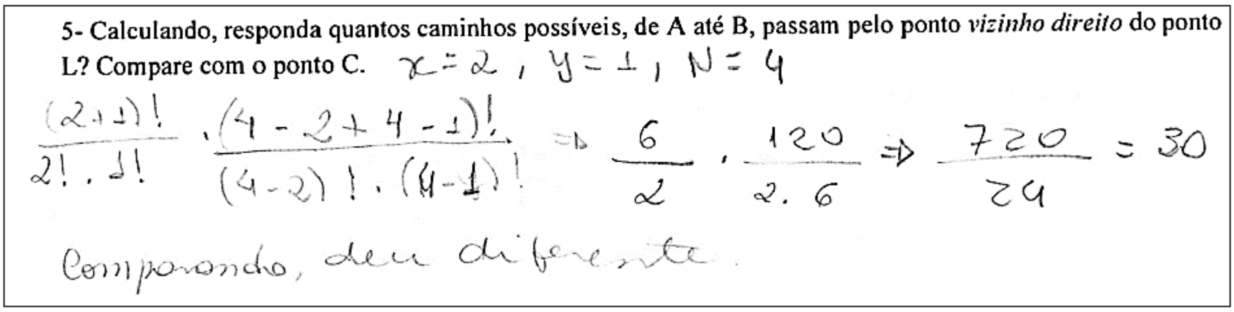
Dois alunos responderam corretamente, utilizando a fórmula fornecida: pelo ponto C passam 30 caminhos. O ponto C possui coordenadas $x = 1$ e $y = 2$, e a grade possui ordem $N = 4$, logo, substituindo na fórmula, tem-se:

$$\frac{(1+2)!}{1!\,2!} \times \frac{(4-1+4-2)!}{(4-1)!\,(4-2)!} = 3 \times \frac{5!}{3!\,2!} = 30\text{caminhos.}$$

Os demais alunos tiveram dificuldades em concluir as contas, conforme ilustra a produção do aluno da figura 13. A técnica utilizada para a realização desta tarefa foi a substituição dos valores na fórmula. A tecnologia que explica a fórmula é o Princípio Fundamental da Contagem – PFC, e a teoria é a teoria geral da análise combinatória. O objetivo era fazê-los perceber que é possível encontrar o número de caminhos que passam por um ponto através de uma fórmula, em detrimento da contagem manual dos caminhos.

Primeiro dia – tarefa 11: Calcular exatamente quantos caminhos passam pelo ponto vizinho direito de L da figura 9, usando a mesma fórmula anterior.

Figura 14 – Enunciado e resposta digitalizada de um dos alunos.



5- Calculando, responda quantos caminhos possíveis, de A até B, passam pelo ponto *vizinho direito* do ponto L? Compare com o ponto C. $x = 2,\ y = 1,\ N = 4$

$$\frac{(2+1)!}{2!\cdot 1!}\cdot\frac{(4-2+4-1)!}{(4-2)!\cdot(4-1)!} \Rightarrow \frac{6}{2}\cdot\frac{120}{2\cdot 6} \Rightarrow \frac{720}{24} = 30$$

Comparando, deu diferente.

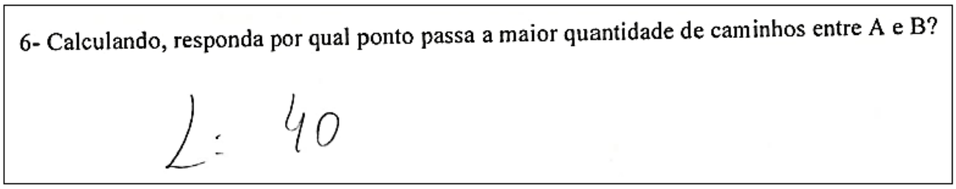
Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador.

Todos responderam corretamente: pelo ponto vizinho de L passam 30 caminhos, a mesma quantidade de caminhos que passam por C, pela simetria do quadrado com relação a estes pontos. O aluno cuja resposta está na figura 14 apenas se enganou ao dizer que a resposta não coincide com a questão anterior, pois são as mesmas respostas. Desta forma, a simetria entre os pontos C e o vizinho direito de L ainda não havia sido compreendida por todos.

A técnica utilizada para a realização desta tarefa foi a substituição dos valores na fórmula. A tecnologia que explica a fórmula é a o Princípio Fundamental da Contagem, e a teoria é a teoria geral da análise combinatória.

Primeiro dia – tarefa 12: Estabelecer exatamente qual é o ponto mais visitado por caminhos, dentre todos os possíveis.

Figura 15 – Enunciado e resposta digitalizada de um dos alunos.



6- Calculando, responda por qual ponto passa a maior quantidade de caminhos entre A e B?

L: 40

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador.

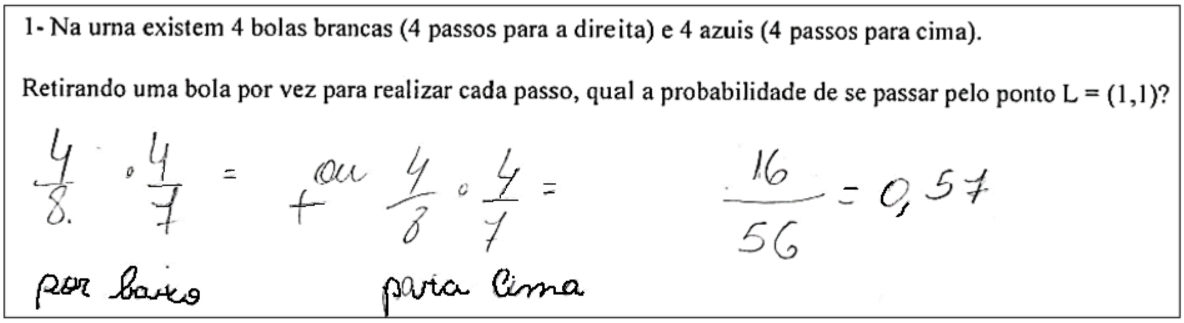
Dois alunos responderam corretamente: o ponto L da figura 9 é o ponto mais visitado por percursos. Os demais escolheram os vizinhos imediatos de A ou de B, ou também o ponto central do quadrado.

A técnica utilizada para a realização desta tarefa foi a substituição dos valores na fórmula em cada ponto do quadrado. A tecnologia que explica a fórmula é o Princípio Fundamental da Contagem, e a teoria é a teoria geral da análise combinatória. O objetivo foi fazê-los encontrar exatamente o ponto mais visitado por caminhos, valendo-se para isto do uso da fórmula em cada ponto. As respostas destas atividades foram então reveladas pelo pesquisador, no quadro, ao fim do primeiro dia de aplicação.

As atividades até aqui tiveram por objetivo estabelecer o ponto mais visitado por caminhos, por contagem manual ou por uso da fórmula fornecida, nas grades três por três e quatro por quatro. As atividades subsequentes no segundo dia tiveram por objetivo abordar o problema do ponto mais visitado por meio do cálculo da probabilidade, na grade quatro por quatro, conforme se poderá verificar a seguir.

Segundo dia – tarefa 1: Calcular a probabilidade de se escolher um caminho aleatório passando pelo ponto L da figura 9, na grade quatro por quatro.

Figura 16 – Enunciado e resposta digitalizada de um dos alunos.


1- Na urna existem 4 bolas brancas (4 passos para a direita) e 4 azuis (4 passos para cima).

Retirando uma bola por vez para realizar cada passo, qual a probabilidade de se passar pelo ponto L = (1,1)?

$\frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = + \text{ ou } \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \quad \frac{16}{56} = 0,57$

por baixo   para cima

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador – imagem melhorada em computador.

Ressalta-se que o pesquisador inicialmente explicou que, na escolha aleatória de um caminho, deve-se imaginar a retirada sucessiva, aleatória e sem reposição de quatro bolinhas brancas e quatro azuis de uma sacola, sendo que cada bolinha branca representa um passo para a direita e cada bolinha azul para cima. Depois desta explicação os alunos foram autorizados a responderem a questão.

Quatro alunos responderam corretamente: $\frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{32}{56} \cong 57\%$ é a chance de se passar pelo ponto mais visitado L = (1,1). Dois alunos responderam $\frac{16}{56} + \frac{16}{56} = \frac{32}{112} = 28{,}6\%$, equivocando-se na soma de frações.

A técnica utilizada para a realização desta tarefa foi a soma dos produtos das probabilidades de cada passo. A tecnologia foram os conceitos de eventos independentes e eventos disjuntos. A teoria, da probabilidade geral. O objetivo aqui era que os alunos pudessem perceber que é possível calcular a probabilidade de se passar por um ponto determinado, ao se escolher aleatoriamente um caminho de A a B. Além disso, que eles pudessem perceber que o ponto mais visitado (1,1) possui, de fato, uma probabilidade maior de ser visitado, 57%, do que os pontos imediatamente vizinhos de A, cada um possuindo uma chance de 50% de ser visitado.

Segundo dia – tarefa 2: Identificar qual seria o ponto mais provável de ser visitado na grade quatro por quatro, na escolha aleatória do caminho pelas retiradas de bolinhas coloridas da sacola

Figura 17 – Enunciado e resposta digitalizada de um dos alunos.

> 2- Lembrando das atividades desenvolvidas no primeiro dia, qual ponto seria mais provável de ser visitado? Comente.
>
> O ponto central, (2,2).

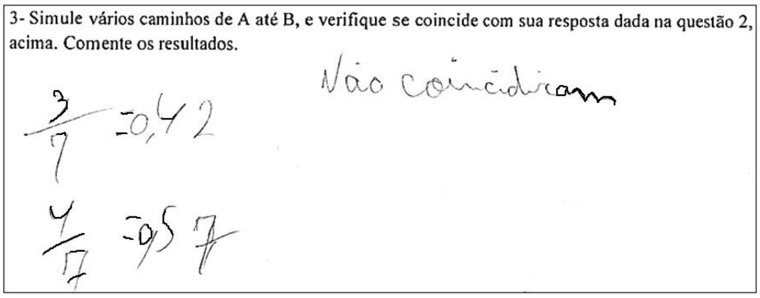
Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador.

Quatro alunos acertaram a questão: o ponto L da figura 9 seria o mais provável de ser visitado por um caminho escolhido aleatoriamente pelas retiradas sem reposição das bolas coloridas da sacola. Um assinalou o ponto central (2,2), o que está ilustrado na figura 17. Outro aluno indicou o ponto abaixo do ponto L. Neste momento, percebeu-se que a maioria dos estudantes estava já entendendo que o ponto (1,1), por possuir mais caminhos, e é por consequência o mais provável de ser atingido por um percurso escolhido ao acaso.

A técnica utilizada para esta tarefa foi a identificação do ponto com mais caminhos ao ponto mais provável de ser visitado. A tecnologia foi a identificação do evento com mais elementos ao evento com maior probabilidade de ocorrência. A teoria, a da probabilidade geral.

Segundo dia – tarefa 3: Simular junto ao pesquisador a escolha aleatória de caminhos e verificar se os resultados coincidem com o resultado da questão 1

Figura 18 – Enunciado e resposta digitalizada de um dos alunos.


3- Simule vários caminhos de A até B, e verifique se coincide com sua resposta dada na questão 2, acima. Comente os resultados.

Não coincidiram

$\frac{3}{7} = 0{,}42$

$\frac{4}{7} = 0{,}57$

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador – imagem melhorada em computador.

Neste momento, o pesquisador segurou uma sacola com 4 bolas azuis e 4 bolas brancas de mesma espessura e tamanho, conforme a foto da figura 19 seguinte, e pediu para que cada aluno retirasse duas bolinhas sem reposição, de olhos fechados, para que o sorteio fosse aleatório, e, na medida que iam tirando, ia-se anotando no quadro branco o caminho sendo formado por estes dois passos, a fim de se verificar se o princípio do caminho formado passou ou não pelo ponto mais visitado (1,1). Não precisava retirar as demais bolas até se atingir o ponto final (4,4), pois o objetivo era apenas verificar se o caminho passaria ou não pelo ponto (1,1).

Figura 19 – Sacola com bolas coloridas.

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador.

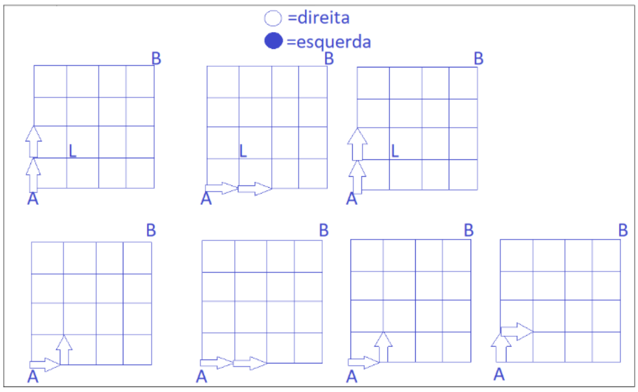
Na figura 20, vemos cada aluno retirando sucessivamente e sem reposição duas bolinhas da sacola, com os olhos fechados. Ao se passar para outro aluno, as bolinhas eram devolvidas para que se pudesse simular um novo início de caminho de dois passos.

Figura 20 – Alunos retirando as bolas coloridas para o sorteio do caminho.

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador.

Então, o pesquisador foi anotando no quadro o caminho formado por cada aluno, como ilustra a Figura 21. O pesquisador também fez a simulação. A figura 21 mostra os resultados das retiradas das duas bolas de cada aluno e do pesquisador:

Figura 21 – Resultados das retiradas das bolas por cada um dos sete alunos.



Fonte: elaboração própria.

Desta forma, cada aluno relataria se a proporção dos percursos que passaram pelo ponto (1,1) se aproxima da probabilidade encontrada na questão 1, de 57%.

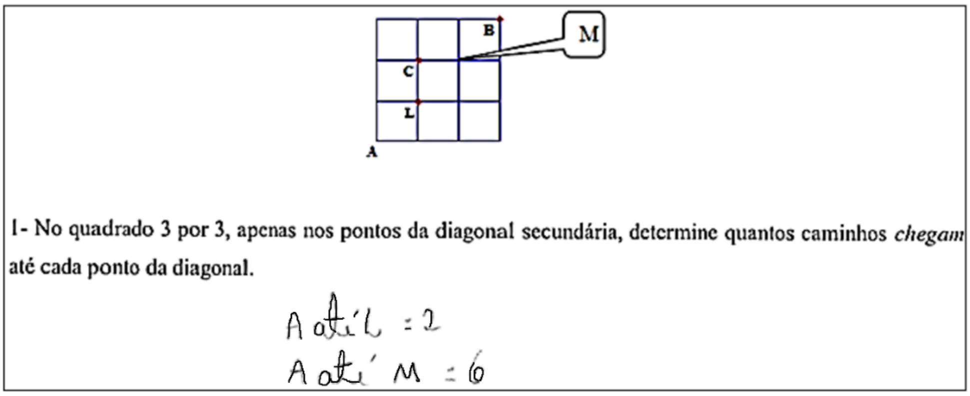
Os sete percursos sorteados resultaram, conforme pode ser visto na figura 21, que três caminhos passaram pelo ponto L = (1,1) e quatro caminhos não passaram pelo ponto L. Desta forma, apenas 3/7 = 42,9% dos caminhos passaram por L, contrariando de certa forma o fato de que pelo ponto mais visitado L = (1,1) a chance de ser passar um percurso aleatório é de 57%, de acordo com a questão 1. Cinco alunos responderam corretamente, e disseram que, de fato, a simulação realizada não coincide com a resposta, como foi o caso da produção do aluno ilustrada na figura 18. De fato, sortear apenas 7 percursos não é suficiente para estabelecer um parâmetro que permitisse evidenciar a resposta. Todavia, considerando o tempo de escolarização dos estudantes, esperava-se que pudessem construir relações que aproximassem do resultado, ainda que sem precisão. Um aluno se absteve nesta questão.

Obviamente, apesar de os alunos não explicitarem, o motivo da discrepância fora o pequeno tamanho da amostra, sete caminhos. Demonstraram, assim, que sabiam associar o resultado teórico ao experimental. A técnica foi dividir o número de caminhos que passaram por L pelo número total de caminhos. A tecnologia foi o fato de que a probabilidade de um evento é a razão entre o número de resultados favoráveis ao evento e o número total de resultados. A teoria, nesse caso, foi a teoria da probabilidade.

Concluída a associação entre número de caminhos e o cálculo da probabilidade, as atividades seguintes tiveram por objetivo estabelecer a resolução do problema do ponto mais visitado a uma propriedade do Triângulo de Pascal.

Terceiro dia – tarefa 1: No quadrado três por três, determinar quantos caminhos chegam até cada ponto da diagonal secundária.

Figura 22 – Figura base, enunciado e resposta digitalizada de um dos alunos.

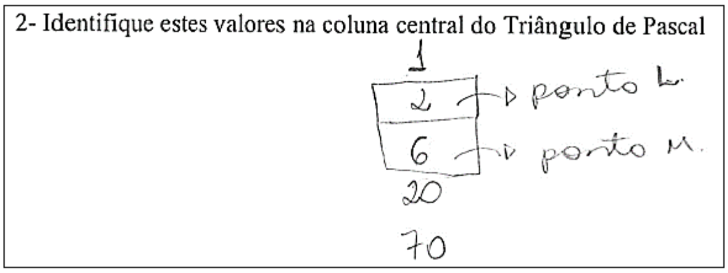


Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador – imagem melhorada em computador.

Todos os alunos acertaram a questão. A técnica utilizada fora a da contagem simples dos percursos. O objetivo era contar quantos caminhos chegam em cada ponto da diagonal do quadrado, para que se pudesse em seguida associar estes valores ao Triângulo de Pascal, conforme a tarefa 2 a seguir descrita.

Terceiro dia – tarefa 2: Identificar os valores obtidos na tarefa anterior na coluna central do Triângulo de Pascal

Figura 23 – Enunciado e resposta digitalizada de um dos alunos.



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador.

Nesta questão, inicialmente o pesquisador ilustrou no quadro o Triângulo de Pascal, explicou algumas de suas propriedades, e identificou a sua coluna central. Todos os alunos fizeram a identificação dos números 2 e 6, respostas da tarefa anterior, na coluna central, sinalizando-os:

Figura 24 – Triângulo de Pascal

1
1 1
1 **2** 1
1 3 3 1
1 4 **6** 4 1
1 5 10 10 5 1

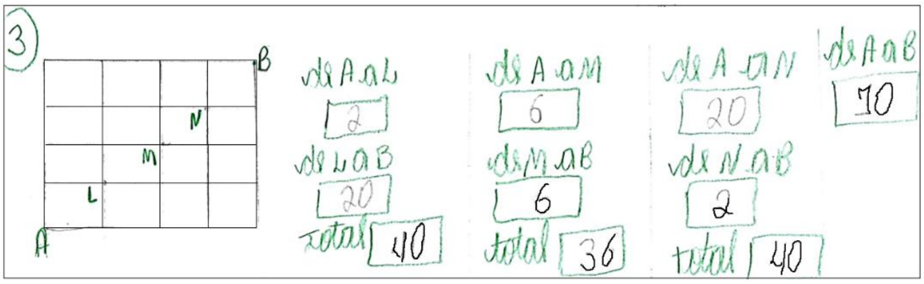
Fonte: elaboração própria.

A técnica fora apenas a identificação de valores a uma lista de números.

A próxima tarefa objetivou associar os caminhos ao Triângulo, porém numa grade quatro por quatro de percursos, para que se pudesse ao fim estabelecer a propriedade almejada.

Terceiro dia – tarefa 3: No quadrado quatro por quatro, determinar quantos caminhos passam por cada ponto da diagonal secundária

Figura 25 – Resposta de um dos alunos



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador – imagem melhorada em computador.

Nesta questão, antes que os estudantes respondessem na folha, o pesquisador foi ao quadro e, como ainda os alunos não tinham percebido a possibilidade de se usar o Princípio Fundamental da Contagem – PFC, para a contagem dos percursos que passam por cada ponto, perguntou aos mesmos: “Quantos caminhos existem saindo do ponto inicial A, até L?” ao que eles responderam dois, corretamente. Em seguida, perguntou: “Quantos caminhos saem de L e chegam ao ponto final B?”, ao que eles responderam corretamente 20 caminhos. Então, perguntou: “Quantos caminhos, portanto, passam por L? Dois alunos responderam: “22.”. Outro: “40, porque já tínhamos calculado antes.” Outro ainda: “Multiplica 2 por 20.” Neste instante, o pesquisador confirmou para a turma que bastava multiplicar 2 por 20 resultando em 40 caminhos passando por L.

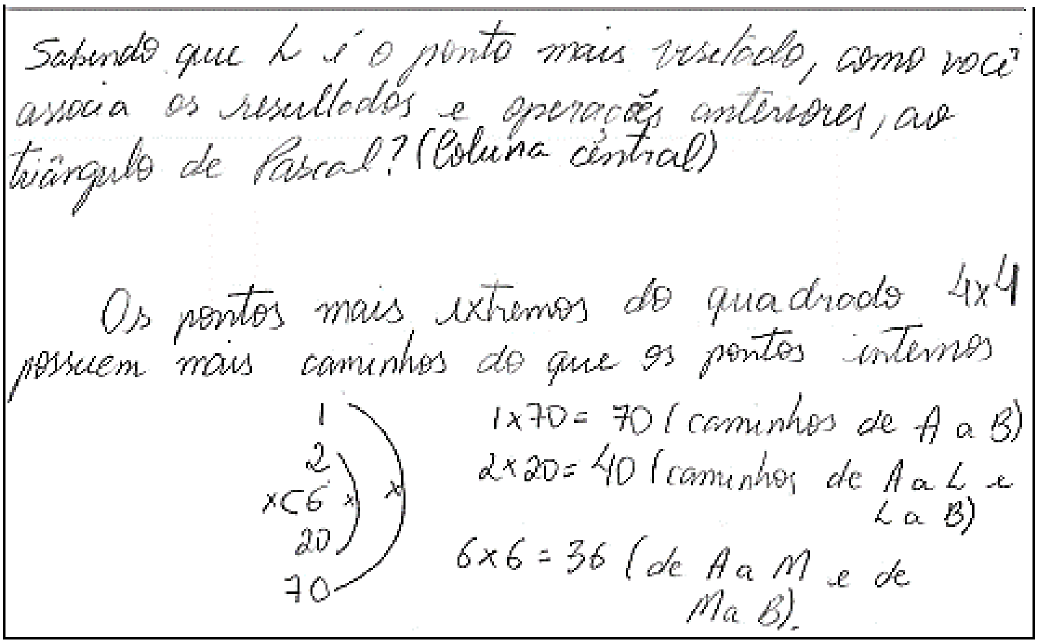
Em seguida, os estudantes então se debruçaram sobre a tarefa dada, de descobrir quantos caminhos passam por cada ponto da diagonal L, M, N e B da figura 24, por meio do PFC. Todos os alunos responderam corretamente as quantidades totais de percursos que passam por cada ponto da diagonal secundária do quadrado, como mostra a figura 24 anterior, identificando quantos caminhos chegam até determinado ponto, quantos caminhos partem deste ponto, e multiplicando os dois resultados para se obter a quantidade de percursos que passam pelo ponto.

A tecnologia foi o Princípio Fundamental da Contagem, por meio do qual foi realizada a multiplicação dos valores encontrados em cada etapa do experimento para se obter o número total de resultados do experimento. A teoria, foi a Combinatória.

A última tarefa desenvolvida, apresentada a seguir, teve por objetivo relacionar a resolução do problema do ponto mais visitado a uma propriedade do Triângulo de Pascal descoberta por Melo e Santos (2014).

Terceiro dia – tarefa 4: Associar os resultados da questão anterior com a coluna central do Triângulo de Pascal

Figura 26 – Enunciado e resposta digitalizada de um dos alunos



Sabendo que L é o ponto mais visitado, como você associa os resultados e operações anteriores, ao triângulo de Pascal? (Coluna central)

Os pontos mais extremos do quadrado 4x4 possuem mais caminhos do que os pontos internos

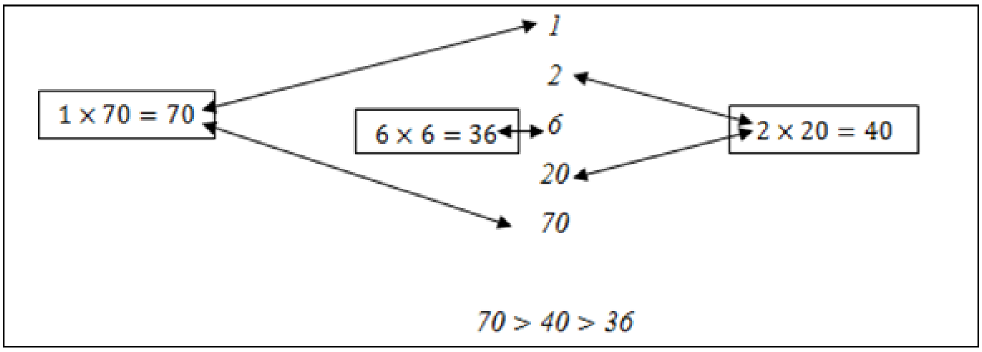
1
2
x6
20
70

1x70= 70 (caminhos de A a B)
2x20= 40 (caminhos de A a L e L a B)
6x6 = 36 (de A a M e de M a B).

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador.

Nesta questão, o objetivo era auxiliar os alunos a descobrirem uma recentemente descoberta propriedade do Triângulo de Pascal, por Melo e Santos (2014), que diz que o produto dos valores mais externos da coluna central do Triângulo de Pascal é maior do que o produto dos valores simetricamente internos à coluna:

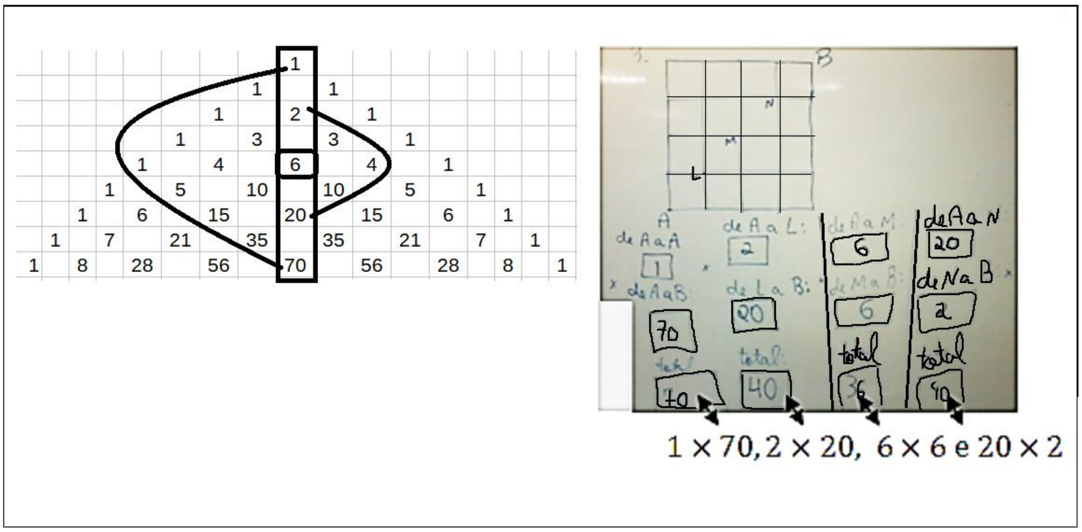
Figura 27 – Uma propriedade do Triângulo de Pascal recentemente descoberta



Fonte: Melo e Santos (2014), com adaptações.

Nesta questão, primeiro o pesquisador desenhou novamente o Triângulo de Pascal no quadro branco e mostrou aos alunos os cálculos que foram realizados na questão anterior, identificando-os à coluna central do Triângulo: 1×70, 2×20 e 6×6, como ilustra a figura 27 seguinte:

Figura 28 – À esquerda, a associação entre o Triângulo de Pascal e o problema do ponto mais visitado. À direita, imagem dos cálculos produzidos pelos estudantes.



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador – imagem melhorada em computador.

Após ter desenhado o triângulo e mostrado a sua associação com a quantidade de caminhos, o pesquisador pediu que respondessem a questão com suas palavras, como bem fez o aluno cuja produção está representada na Figura 25, arrematando que 70 > 40 > 36. Cabe observar que a propriedade do Triângulo ilustrada na figura 26 vale para toda a infinita coluna central do Triângulo, conforme mostra o artigo de Melo e Santos (2014). A técnica utilizada nessa atividade foi a associação entre as operações com suas correspondentes em uma lista numérica (a coluna central do Triângulo). Pôde-se perceber, pelas respostas assim obtidas, que os alunos entenderam bem a associação entre o número de caminhos que passam pelos pontos da diagonal secundária do quadrado e o Triângulo de Pascal, bem como as operações realizadas.

Considerações Finais

Os alunos puderam compreender a proposta e a resolução do problema do ponto mais visitado, bem como sua associação ao Triângulo de Pascal, pela metodologia de resolução de problemas. O momento de incubação de um dia para outro pareceu ter surtido efeito, dado o aumento de porcentagens de acertos no decorrer dos três dias de aplicação das atividades.

Nas questões do primeiro dia houve dificuldade no entendimento do que o problema propunha. Com o auxílio progressivo do pesquisador fornecendo os feedbacks após cada conjunto de atividades, as dificuldades foram sendo sanadas e, nas últimas questões, a porcentagem de acerto das tarefas aumentou significativamente.

A hora das retiradas das bolinhas da sacola foi um momento que envolveu descontração e verificação visual do problema, no qual os alunos puderam comparar o resultado teórico com o experimental. Eles perceberam devidamente a diferença encontrada entre a teoria e a experimentação.

As análises praxeológicas das produções dos estudantes mostraram a importância de se conhecerem as técnicas disponíveis para a realização de tarefas, bem como o arsenal teórico tecnologia-teoria que explicam estas técnicas, conforme a teoria de Chevallard. Em geral, os alunos progrediram com relação ao uso das possíveis técnicas. As principais técnicas utilizadas foram a contagem simples, depois a aplicação da fórmula de se encontrar o número de caminhos, em seguida a técnica de calcular a probabilidade de interseção e a união de eventos. Também foi utilizada a técnica de converter decimais em porcentagens, de converter frações em decimais, e de associar o problema dos caminhos ao Triângulo de Pascal, sendo esta última até então não conhecida pelos estudantes participantes da pesquisa, por ser um resultado recente. As tecnologias e teorias empregadas foram basicamente: o PFC, a teoria da probabilidade, e a teoria da contagem.

O problema do ponto mais visitado pode ser aplicado também como forma de estudo das cadeias de Markov no nível superior, como mostra o artigo de Santos (2016a). Também enseja um campo amplo de aplicação do problema em turmas de outros níveis escolares, o fundamental e o médio, dada a simplicidade de seu enunciado e a possibilidade de se trabalhar em quadrados pequenos como três por três ou quatro por quatro. Porém, não apenas o problema em si, mas o tratamento das informações produzidas por meio da Análise Praxeológica de Chevallard com relação à resolução deste e de outros problemas de Probabilidade e de Análise Combinatória no Ensino Superior, ainda é um campo pouco explorado, e cabem mais aprofundamentos e investigações a serem feitas. Enfim, generalizações do presente problema para o retângulo e para o espaço tridimensional (SANTOS; MELO, 2017) bem como abordagens probabilísticas do mesmo (SANTOS, 2016b) aplicadas junto aos estudantes, sejam de nível superior ou médio, também podem ser novas fontes de pesquisa em Educação Matemática.

Referências

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Editora da UFPR, 2007.

BARBOSA, Edelweis Jose Tavares; LIMA, Ana Paula Avelar Brito. Organizações matemática e didática entre duas coleções didáticas sobre equações do primeiro grau. **REVEMAT**. Florianopolis (SC), v.9, n. 2, p. 110. 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática – Ensino fundamental – 1º e 2º ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática – Ensino Fundamental – 3º e 4º ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática – Ensino Médio. Brasília: MEC/SEF, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CHEVALLARD, Yves. L'analise des pratiques enseignantes en théorie antropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Editions, v. 19, n. 2, p. 221-265, 1999.

ENGLISH, Lyn D. Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. In: JONES, Graham A. (eds). **Exploring Probability in School:** Challenges for teaching and learning. Mathematics Education Library, vol 40. Boston: Springer, 2005.

GARNICA, Antônio Vicente M. História Oral e educação Matemática. In: BORBA, Marcelo Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

GONÇALVES, Mauro César. **Concepções de professores e o ensino de probabilidade na escola básica**. 2004. 150 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

GONTIJO, Hércules Gontijo. **Relação entre criatividade, criatividade em matemática, e motivação em matemática de alunos do ensino médio**. 2007. 194f. Tese (Doutorado em Psicologia) - Instituto de Psicologia, Universidade de Brasília, Brasília.

GONTIJO, Cleyton Hércules. Relações entre criatividade e motivação em matemática: a pesquisa e as implicações para a prática pedagógica. In: GONTIJO, Cleyton Hércules; FONSECA, Mateus Gianni. (Org.). **Criatividade em Matemática:** lições da pesquisa (p. 153-172). Curitiba: CRV, 2020.

GOULART, Amari. **O discurso sobre os conceitos probabilísticos para a escola básica.** 2007. 88 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

HÉLIE, Sébastien; SUN, Ron. Incubation, insight, and creative problem solving: a unified theory and a connectionist model. **Psychological Review**, Washington, DC, v. 117, n. 3, p. 994-1024, julho/2010.

JULIANELLI, José Roberto; DASSIE, Bruno Alves; LIMA, Mário Luiz Alves de; SÁ, Ilydio Pereira de. **Curso de Análise Combinatória e Probabilidade**. 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

KAVOUSIAN, Shabnam. **Enquiries into undergraduate students understanding of combinatorial structures**. Tese de Doutoramento, p. 12-13. Faculdade de Educação. Simon Fraser University. Burnaby. Canadá. 2008. <http://summit.sfu.ca/item/9308>. Acesso em 24 de setembro de 2021.

MELO, Antônio Luiz de.; SANTOS, Rogério César dos. Desigualdades no Triângulo de Pascal. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 3, n. 1, p. 75-84, março/2014.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. **Pesquisa Social:** teoria, método e criatividade. Petrópolis, Vozes, 2002.

NAKAMURA, Keiji. **Conjunto dos números irracionais**: a trajetória de um conteúdo não incorporado às práticas escolares. 2008. 126 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos? **Espaço pedagógico,** Passo Fundo, v. 20, n. 1, p. 88-104, jan./jun. 2013.

PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **EM TEIA,** Recife, v. 1, n. 1, p. 1-22, 2010.

PINHEIRO, Carlos Alberto de Miranda. **Análise combinatória:** organizações matemáticas e didáticas nos livros escolares brasileiros no período entre 1895-2009. 2015. 145 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

PINTO, Evanilson Brandão; SILVA, Jonatan Floriano da Silva. Combinatória no Ensino Médio: concentrando o ensino nos objetos de aprendizagem. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 38, n. 2, p. 675 – 693, Mai.- Ago./ 2016.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas** – um novo aspecto do método matemático. Tradução e Adaptação de Araújo, H. L. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

SANTOS, Paulo Avelino dos. **A modelagem como proposta para a introdução à probabilidade por meio dos passeios aleatórios da Mônica.** 2010. 201 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo

SANTOS, Rogério César dos. O problema do ponto mais visitado e a cadeia do viajante. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 8, p. 19-26, 2016a.

SANTOS, Rogério César dos. Um estudo probabilístico sobre caminhos em reticulados quadrados. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 8. p. 76-85, 2016b.

SANTOS, Rogério César dos; CASTILHO, José Eduardo. O problema do ponto mais visitado. **Revista do Professor de Matemática,** São Paulo, v. 82, p. 50-52, 2013.

SANTOS, Rogério César dos; MELO, Antônio Luiz de. O problema do ponto mais visitado em retângulos e paralelepípedos. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 11, p. 89-98, 2017.

SILVA, Júlio César da. **Conhecimentos estatísticos e os exames oficiais**: SAEB, ENEM E SARESP. 2007. 105 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

STERNBERG, Robert. J. **Psicologia Cognitiva**. Editora Artmed, 2008.

VERAS, Claudio Monteiro. **A estatística nas séries iniciais**: uma experiência de formação com um grupo colaborativo com professores polivalentes. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 137 f., 2010.

Recebido em: 24 de setembro de 2021
Aprovado em: 27 de julho de 2022