revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Possíveis articulações entre tópicos de Análise Real e o ensino de matemática na Educação Básica: uma revisão sistemática de literatura

DOI: https://doi.org/rpem.2026.15.36.10802

Rafael Roberto Germinaro[1]
Bruno Rodrigo Teixeira[2]

Resumo: O presente trabalho tem como objetivo selecionar e descrever, a partir de uma revisão sistemática de literatura, possíveis articulações entre tópicos de Análise Real e o ensino de matemática na Educação Básica, em que tais possíveis articulações são compreendidas como excertos de trabalhos acadêmicos que envolvem situações de demanda de conhecimento matemático do professor de matemática na Educação Básica que possibilitem a mobilização do conhecimento de tópicos de Análise Real. Para isso, foi feita uma revisão sistemática de literatura a partir de cinco bases de dados consolidadas em pesquisas de âmbito nacional. As possíveis articulações foram identificadas em quatro trabalhos, que conectam tópicos de Análise Real – como estrutura algébrica e topológica dos números reais, Teorema dos Intervalos Encaixantes, definição de sequências numéricas e resultados relacionados às sequências numéricas – ao ensino dos seguintes conteúdos da Educação Básica: propriedades dos números reais, completude dos números reais associada à reta numérica, sequências numéricas, soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica, potência de expoente irracional e área do círculo. Tais articulações apontam para a possibilidade de um ensino de tópicos de Análise Real na Licenciatura em Matemática que considere aspectos pedagógicos tendo em vista possíveis demandas do trabalho realizado em sala de aula da Educação Básica.
Palavras-chave: Educação Matemática; Formação inicial de professores de matemática; Análise Real; Ensino de matemática na Educação Básica.

Possible articulations between Real Analysis topics and mathematics teaching at basic education: a systematic literature review

Abstract: This paper aims to select and describe potential articulations between Real Analysis topics and Mathematics teaching in Basic Education through a systematic literature review. These possible articulations are understood as excerpts from academic publications involving situations that required mathematical knowledge from Mathematics teachers in Basic Education and enabled the mobilization of Real Analysis knowledge. To do so, a systematic literature review was conducted based on five databases that were consolidated in Brazilian studies. Potential articulations were found in four publications that link topics in Real Analysis – such as the algebraic and topologic structure of real numbers, the Nested Interval Theorem, the definition of numerical sequences and results related to numerical sequences – to the teaching of the following Basic Education content: properties of real numbers, the completeness of real numbers associated with the number line, numerical sequences, the sum of the infinite terms of a geometric progression, exponentiation with irrational exponents and the area of a circle. These connections show that it is possible to teach Real Analysis topics in Mathematics teaching degree programs while taking into consideration the pedagogical aspects of potential demands related to classroom work in Basic Education.
Keywords: Mathematics Education; Preservice Mathematics Teacher Education; Real Analysis; Mathematics Teaching in Basic Education.

[1] Doutorando em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina. E-mail: rafael.roberto@uel.br - ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9147-2385.
[2] Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina. E-mail: bruno@uel.br - ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0294-4470.

1 Introdução

Qual o objetivo de um curso de Licenciatura em Matemática se não for o de formar professores de matemática? O profissional formado nessa área é reconhecido legalmente e socialmente como aquele que está preparado para a prática docente nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio (Brasil, 2002). No entanto, apesar dessas expectativas e exigências sociais, o futuro professor de matemática encontra-se inserido em espaço formativo que, a despeito de suas potencialidades, possui lacunas e fatores limitantes em praticamente todo o território nacional (Lalor; Gonçalves, 2024; Leite; Passos, 2020).

Entre as lacunas na formação inicial do professor de matemática, segundo Leite e Passos (2020), existe a referente ao fato de os saberes oportunizados pela instituição formadora pouco condizerem com os conhecimentos profissionais necessários para a prática. A exemplo, Broetto e Santos-Wagner (2019) problematizam a superficialidade no estudo dos números irracionais na Educação Básica como provável consequência de uma abordagem formalista que o professor experimentou como aluno em sua formação inicial. Nesse mesmo sentido, Moreira e David (2004) destacam que a condução formal-lógico-dedutiva do estudo dos números racionais é insuficiente e, muitas vezes, inadequada como forma de sistematização desse tópico para o professor que atuará na Educação Básica. Esses exemplos são caracterizados por uma perspectiva lógico-formal do conjunto dos números reais, como a com que o licenciando tem contato na disciplina de Análise Real (Reis, 2001).

Parte do que se estuda nessa disciplina são os números reais, as sequências e as próprias funções reais (Alcantara, 2022), tópicos frequentes no currículo do Ensino Fundamental ao Médio. Todavia, Wasserman, Buchbinder e Buchholtz (2023) sublinham que o estudo desses assuntos inseridos no contexto exclusivo da Matemática acadêmica tem pouco valor no desenvolvimento profissional docente. Nesse mesmo sentido, Moreira, Cury e Vianna (2005, p. 39) enfatizam:

> [...] fica claro que uma articulação fundamentada entre os conhecimentos trabalhados na formação matemática e as questões postas pela prática pedagógica na escola básica é uma tarefa excessivamente complexa para ser atribuída ao esforço individual do licenciado ao longo de sua prática. Há um consenso, hoje, de que essa articulação deve ser considerada como uma das mais importantes tarefas dentro do próprio processo de formação na licenciatura.

A partir disso, questiona-se: quais articulações entre tópicos de Análise Real e o ensino de matemática na Educação Básica têm sido produzidas em trabalhos de pesquisa brasileiros? Para isso, neste artigo tem-se o objetivo de selecionar e descrever, a partir de uma revisão sistemática de literatura, possíveis articulações entre tópicos de Análise Real e o ensino de matemática na Educação Básica. Nesse sentido, este trabalho se configura como uma revisão sistemática de investigações qualitativas (Oliveira; Miranda; Saad, 2020).

Diante do exposto, nas seções seguintes encontram-se: os aspectos teóricos, em que é apresentada uma problemática envolvendo a Análise Real na Licenciatura em Matemática; os aspectos metodológicos utilizados para o alcance do objetivo; os resultados, em que são apresentados os trabalhos do *corpus* acrescidos das respectivas articulações; e, por fim, as considerações finais, com a síntese das informações da seção anterior e o desenvolvimento de algumas conclusões a partir do que foi observado.

2 Aspectos teóricos

Associada à distância entre a formação proporcionada por instituições de Ensino Superior e as demandas da realidade escolar, Leite e Passos (2020, p. 7) evidenciam, como lacuna da formação inicial de professores, uma "desarticulação entre formação específica e pedagógica". Isso pode ocorrer, por exemplo, na usual condução de disciplinas específicas, como Análise Real, se realizada em contexto puramente matemático – dissociado de aspectos pedagógicos –, o que pode possuir valor mínimo para a atuação em sala de aula do ensino básico, segundo professores que já passaram pelo curso (Bolognezi, 2006; Wasserman; Buchbinder; Buchholtz 2023; Wasserman *et al.*, 2016).

Desse modo, a abordagem geralmente utilizada na condução da disciplina de Análise Real na Licenciatura em Matemática é desarticulada da realidade da Educação Básica, pois, apesar de conter tópicos presentes no currículo do Ensino Fundamental ao Ensino Médio, estes costumam ser introduzidos ao professor em formação de forma estritamente lógico-dedutiva e com grau significativo de abstração, o que usualmente não promove articulações com a forma com que os conceitos são trabalhados na escola (Esquincalha; Bairral, 2019).

No que diz respeito às Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Matemática, bacharelado e licenciatura, em trecho que versa sobre conteúdos comuns a todos os cursos de licenciatura, o documento estabelece o estudo de "Fundamentos de Análise" e que este pode ser distribuído ao longo do currículo proposto pela respectiva instituição (Brasil, 2001). No entanto, segundo Camargo *et al.* (2023), no respectivo período da pesquisa, dos 305 cursos de

Licenciatura em Matemática presenciais e ofertados por instituições públicas do Brasil, 303 optaram por incluir uma disciplina na temática de Análise Real no currículo obrigatório, com carga horária média de 86 horas; e apenas 2, dos 305 cursos, optaram por não realizar tal inclusão. Desse modo, apesar de a possibilidade de alguma flexibilização ser prevista em documentos nacionais, os responsáveis pela elaboração/adequação do projeto pedagógico das licenciaturas em Matemática evidentemente valorizam Análise Real como disciplina no currículo obrigatório.

Para Moreira (2012), no Brasil, a causa dessa abordagem usual em disciplinas de *conteúdo*, como Análise Real, tem raízes históricas e data dos anos 30 do século XX, quando se entendia que, quanto mais se sabia a respeito de um assunto, mais se poderia ensiná-lo. Por isso, nos 3 primeiros anos do curso de licenciatura se estudavam exclusivamente assuntos da disciplina específica – Matemática – e, para concluir, havia 1 ano para *aprender como se transmite o conhecimento* em disciplinas de Didática, sendo essa a denominada estrutura 3+1 das licenciaturas (Moreira, 2012). Apesar de as disciplinas específicas não mais constituírem 75% do currículo em diversas instituições, a lógica permanece a mesma na condução do processo formativo: “As disciplinas de conteúdo são projetadas e executadas independentemente das outras disciplinas” (Moreira, 2012, p. 1140).

No entanto, é necessário compreender que é a conjuntura do curso que forma o professor (Leite; Passos, 2020), e não *partes* dele, pois o professor da Educação Básica não separa a componente do conteúdo da componente pedagógica em sua prática na sala de aula. Portanto, uma licenciatura conduzida no mesmo princípio da estrutura 3+1 não prepara um profissional para sua prática real. Moreira (2012, p. 142) acrescenta:

> No limite, a necessidade de uma reflexão profunda sobre a estrutura do processo de formação do professor chega a ser uma questão de natureza ética, a ser considerada pelas instituições que organizam esse processo e fornecem a necessária certificação para o exercício do ofício.

Então, se o objetivo de um curso de licenciatura em Matemática é, de fato, formar professores de matemática para a atuação nas escolas, é necessário refletir sobre a condução de disciplinas de conteúdo específico, como Análise Real, sob uma perspectiva que leve em consideração a prática docente nas escolas. É nessa intenção que o potencial de articulações com o ensino de matemática na Educação Básica é destacado.

Wasserman *et al.* (2016, p. 3, tradução própria) propõem um modelo de articulação para ser utilizado na formação de professores de matemática, em cuja estrutura está a proposição de usar demandas de conhecimento da matemática que surgem para o professor na sala de aula para "identificar o conteúdo de Análise Real mais adequado para desenvolver as formas de conhecimento matemático ou práticas que ajudariam o professor a lidar com tal demanda de forma eficaz"[3]; e a partir disso promover o estudo do conteúdo de Análise Real identificado.

Segundo Wasserman *et al.*, existem algumas tensões ao elaborar propostas de articulações entre Análise Real e o ensino de matemática na Educação Básica, como o equilíbrio entre a matemática avançada e a situação prática de sala de aula. Os autores relatam que, enquanto por um lado existe o risco de propor uma demanda de conhecimento matemático não realista de sala de aula apenas para que o estudo matemático faça algum sentido, pelo outro lado é necessário cautela para que a demanda matemática da situação proposta seja suficiente para que se justifique o estudo de Análise Real.

Assim, no presente artigo busca-se selecionar e descrever, a partir de uma revisão sistemática de literatura, possíveis articulações entre tópicos de Análise Real e o ensino de matemática na Educação Básica, em que tais possíveis articulações são compreendidas como excertos de trabalhos acadêmicos que envolvem situações de demanda de conhecimento matemático do professor que possibilitem a mobilização do conhecimento de tópicos de Análise Real. Os aspectos metodológicos de tal revisão são descritos a seguir.

3 Aspectos metodológicos

Considerando o objetivo deste trabalho, foi desenvolvido um estudo de natureza qualitativa, contemplando características como as assinaladas por Garnica (2004, p. 86) para esse tipo de pesquisa:

> [...] (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a *priori*, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas.

Entre as pesquisas de abordagem qualitativa, Oliveira, Miranda e Saad (2020) destacam

[3] "[…] identify the content of real analysis that might be well-suited for developing the kinds of mathematical knowledge or practices that would help teachers carry out such work success fully"

as revisões sistemáticas de investigações qualitativas. Neste artigo, será desenvolvida uma revisão nesses moldes, o que se deve ao fato de ir ao encontro da seleção de estudos que apresentam articulações entre tópicos de Análise Real e o ensino de matemática na Educação Básica.

Mendes e Pereira (2020) propõem cinco etapas para o desenvolvimento de revisões sistemáticas na área de Ensino e Educação Matemática: objetivo e pergunta, busca dos trabalhos, processo de seleção das pesquisas, análise das produções e apresentação da revisão sistemática.

Dado que é o objetivo da pesquisa que orienta a revisão, pois define prioridades e interesses, para que não se perca de vista a investigação principal, a *primeira etapa* é a definição de um objetivo ou de uma pergunta. Assim, cabe ressaltar novamente o objetivo do presente artigo: selecionar e descrever, a partir de uma revisão sistemática de literatura, possíveis articulações entre tópicos de Análise Real e o ensino de matemática na Educação Básica.

Na *segunda etapa*, Mendes e Pereira sugerem uma busca inicial para que o pesquisador se aprofunde no tema e identifique palavras-chave associadas à temática da pesquisa; e, a partir das palavras-chave, realize uma busca exaustiva da literatura, utilizando diferentes combinações de palavras-chave, para identificar os estudos relevantes sobre o tema.

Desse modo, a busca inicial foi exploratória, feita em algumas das bases de dados consolidadas em pesquisas de âmbito nacional, tais como o Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) – representado aqui pela sigla “CTDC” –, a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), a Scientific Electronic Library Online (SciELO), o Portal de Periódicos da CAPES e o Google Acadêmico. Inicialmente, foi utilizada apenas “Análise Real” como expressão nas buscas, considerada suficiente para viabilizar a revisão pretendida. Desse modo, as bases de dados utilizadas retornaram as quantidades de trabalhos – delimitados àqueles escritos na língua portuguesa e sem delimitação temporal – mostradas no Quadro 1.

Quadro 1 - Quantidade de retornos em cada base de dados

Base de dados	**Quantidade de trabalhos**	**Data da busca**
BDTD	20	25/08/2023
CTDC	44	26/08/2023
SciELO	4	11/09/2023
Portal de Periódicos da CAPES	23	11/09/2023
Google Acadêmico	4.830	11/09/2023

Fonte**:** elaborado pelos autores.

Percebe-se que, com exceção do Google Acadêmico, as bases de dados apresentaram um número de resultados cuja análise é viável no âmbito desta pesquisa e, portanto, já foram, de imediato, incluídas no processo a ser feito na *terceira etapa*, referente à seleção das pesquisas.

Silva (2020) destaca a variedade de resultados que o Google Acadêmico contém, tais como teses, dissertações, artigos de eventos e de periódicos, livros, documentos e trabalhos de conclusão de curso – TCC – (tanto em nível de graduação quanto de mestrado profissional). Corroborando essa ideia, Mendes e Pereira (2020) também pontuam que sua busca é ampla e que geralmente apresenta grande quantidade de trabalhos em relação a outras bases.

Logo, para a pesquisa na base de dados do Google Acadêmico, houve a necessidade de combinar "Análise Real" com outras expressões de busca, para refinar a quantidade de resultados e obter um número de trabalhos alinhado ao escopo da pesquisa e cuja análise fosse viável. Para isso, foi considerado o objetivo do artigo para a opção de incluir "Educação Básica" como palavra-chave na busca no Google Acadêmico, de modo a manter a revisão alinhada ao objetivo da pesquisa.

Durante nova busca exploratória, foi notado o uso recorrente da expressão "ensino básico", além da expressão "educação básica". Assim, apesar de não ser uma expressão muito utilizada em documentos oficiais, tais como a *Base Nacional Comum Curricular* (Brasil, 2018) e as *Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica* (Brasil, 2013), dada sua recorrência, foi considerada sua inclusão na expressão de busca, o que permitiu obter trabalhos que utilizem "ensino básico" em vez de "educação básica". Portanto, a seguinte expressão de busca foi utilizada apenas no Google Acadêmico: "Análise Real" AND ("educação básica" OR "ensino básico")[4]. Em pesquisa feita no dia 15 de setembro de 2023, essa expressão retornou aproximadamente 1.280 resultados, novamente um número de trabalhos inviável para uma seleção e análise no presente contexto.

Com a busca inicial realizada, uma das etapas sugeridas por Mendes e Pereira (2020), foram observados alguns TCC de graduação com potencial para a composição do *corpus* deste trabalho, pois iam ao encontro das intenções da pesquisa. Como as outras bases de dados consideradas não contemplavam essa categoria de trabalhos acadêmicos, optou-se por restringir a busca do Google Acadêmico aos TCC, na intenção de direcionar a busca a esses trabalhos de graduação. Para isso, o termo de busca "trabalho de conclusão de curso" associado ao operador

[4] Segundo Picalho, Lucas e Amorim (2022, p. 9), o uso de parênteses "comunica ao sistema, em qual ordem ele deve processar a expressão de busca do usuário, para então retornar resultados lógicos na pesquisa executada." Já o conectivo OR serve para "encontrar trabalhos em que qualquer um (ou ambos) dos termos estivesse presente" (Azoubel, 2020, p. 262).

AND foi incluído na expressão de busca, tendo em vista que se pode considerar que a maioria dos TCC de graduação contenham "trabalho de conclusão de curso"[5] no arquivo de texto.

Desse modo, a expressão de busca do Google Acadêmico que passou então a ser considerada foi: "Trabalho de conclusão de curso" AND "Análise Real" AND ("educação básica" OR "ensino básico"). Em pesquisa feita no dia 16 de outubro de 2023, os resultados foram aproximadamente 377, cuja análise seria viável no âmbito desse artigo.

Na *terceira etapa*, "é importante destacar que, embora os trabalhos adquiridos nas bases tenham relação com a pesquisa, nem sempre eles são pertinentes" (Mendes; Pereira, 2020, p. 222). Desse modo, o pesquisador seleciona os trabalhos que irão compor o *corpus* no decorrer de duas fases: na primeira[6], verificam-se os títulos, os resumos e as palavras-chave para identificar os estudos que não são pertinentes em relação ao objetivo da pesquisa e excluí-los de futuras avaliações – no caso de dúvidas, deve-se buscar o texto na íntegra, realizando uma leitura direcionada à introdução, à metodologia e às conclusões finais; enquanto na segunda fase é feita a leitura do trabalho para decidir se ele fará parte do *corpus* da pesquisa, não é necessária uma leitura completa e analítica, pois se trata de um momento de seleção (Mendes; Pereira, 2020). A seleção dos trabalhos foi feita a partir da análise de dois pesquisadores, mestrando e orientador, de modo que a primeira fase foi executada pelo mestrando e a segunda fase foi feita de forma colaborativa entre ambos à luz do objetivo traçado.

Para o melhor gerenciamento de ambas as fases da terceira etapa, segundo Mendes e Pereira, devem ser elaborados critérios de inclusão e exclusão de textos no *corpus*. Esses critérios devem ser seguidos metodicamente para trazer rigor à seleção e à pesquisa como um todo, logo, precisam ser bem definidos e aplicáveis a quaisquer trabalhos que uma base de dados retorne após a pesquisa das palavras-chave. Foram definidos então, inspirados em Alcantara (2022), os critérios de inclusão, mostrados no Quadro 2; e os critérios de exclusão, apresentados logo a seguir, na Figura 1.

Quadro 2 - Critérios de inclusão

Idioma	Português
Foco	Formação de professores, Análise Real e ensino de matemática na Educação Básica
Disponibilidade	Completa em meio eletrônico
População-alvo	Licenciandos em Matemática, professores de matemática

Fonte: elaborado pelos autores.

[5] Posteriormente foi verificado que esse termo de busca também incluiria TCC de Mestrado Profissional, o que não inviabilizou o trabalho de seleção para o *corpus*.
[6] Nesta primeira fase centenas de resultados tais como ementas de disciplinas de Análise Real e trabalhos não relacionados ao ensino de Matemática na Educação Básica foram excluídos.

Figura 1: Critérios de exclusão

- Trabalhos que tratam do ensino de Análise Real na Licenciatura em Matemática, sem relacionar com o ensino de matemática na Educação Básica.
- Trabalhos que relacionam Análise Real e os conteúdos curriculares de matemática na Educação Básica, sem destacar o ensino desses conteúdos.
- Trabalhos que contêm possíveis articulações com o ensino de matemática na Educação Básica, mas que não foram feitas com tópicos explicitamente associados à Análise Real.
- Outras revisões bibliográficas.

Fonte: elaborado pelos autores.

Na busca por articulações entre Análise Real e o ensino de matemática na Educação Básica nos trabalhos, foi adotada a seguinte perspectiva de articulação neste artigo: o conhecimento em Análise Real explicitamente potencializando o ensino de matemática na Educação Básica.

Ao fim da aplicação dos critérios em 468 trabalhos[7] foi obtido o *corpus* organizado a seguir, no Quadro 3.

Quadro 3 - *Corpus*

Base(s)	**Ano**	**Título**	**Tipo de TCC**	**Autor(a)**
BDTD, CTDC	2011	*"Os números reais": um convite ao professor de matemática do Ensino Fundamental e do Ensino Médio*	Mestrado profissional	Willian José da Cruz
BDTD, CTDC, Google Acadêmico	2017	*Conceitos de Análise Matemática na reta para bem compreender os números reais no Ensino Médio*	Mestrado profissional	Mireli Morais de Oliveira
CTDC	2019	*A importância da Análise Real na formação do professor de matemática do Ensino Médio: o caso das sequências numéricas*	Mestrado profissional	Camila Paulino Marques
Google Acadêmico	2021	*Uma abordagem da Análise Real para o curso de Licenciatura sob a perspectiva da aprendizagem situada*	Graduação	Mauro Nunes Weber

Fonte: elaborado pelos autores.

É possível notar no Quadro 3 que nenhum trabalho oriundo da SciELO ou do Portal de

[7] Desses 468 trabalhos, 377 foram resultado da busca realizada no Google Acadêmico. Os demais 91 foram obtidos nas outras bases de dados, conforme o Quadro 1.

Periódicos da CAPES foi incluso no *corpus* – devido aos critérios de exclusão e inclusão estabelecidos. O que se observa é uma recorrência de trabalhos de mestrado profissional e um TCC de graduação.

Ao consultar a formação acadêmica dos autores e dos orientadores desses quatro trabalhos, nota-se que os estudos são resultado de uma colaboração entre licenciados ou licenciandos em Matemática e doutores em Matemática, o que indica uma possível iniciativa para a condução da disciplina de Análise Real sob uma perspectiva que possa levar em consideração a prática docente nas escolas.

Com a definição do *corpus*, a *quarta etapa* é iniciada na análise das produções. Segundo Mendes e Pereira (2020), é nessa etapa que se extraem sistematicamente os dados relevantes ao objetivo da pesquisa de cada trabalho. Neste caso, a extração de possíveis articulações identificadas nos TCC, as quais serão expostas a seguir.

Por fim, a *quinta etapa* consiste na apresentação da revisão sistemática, em que primeiramente é necessário descrever detalhadamente todos os procedimentos adotados – conforme realizado nesta seção –, destacar os estudos adotados e concluir com retomada ao objetivo inicial, refletindo a respeito dos dados em relação à proposta da pesquisa, como feito ao fim deste artigo.

4 Resultados

No trabalho de Cruz (2011, p. 19), o autor se propõe a "iniciar uma reflexão, a partir de números reais, da forma como a disciplina Análise Real poderia ser trabalhada nos cursos de licenciatura em matemática", visando "construir um elo entre o formalismo conceitual dos números reais e a matemática vivenciada na escola básica".

Em capítulo no qual a proposta é apresentar a construção axiomática dos números reais em suas estruturas algébricas e topológicas, em que para isso "a abordagem escolhida foi a construção dos números reais como estrutura de corpo ordenado[8] completo[9]" (Cruz, 2011, p. 20), ao passo que identifica "elementos desses no âmbito do ensino fundamental e do ensino

[8] "Um corpo K será dito ordenado se neste corpo está destacado ou fixado um subconjunto P, chamado de conjunto dos elementos positivos de K, que satisfaz as seguintes condições: 1ª – Se a e b pertencem a P, então $a + b$ pertence a P, ou seja, se dois elementos do corpo K são positivos, a soma deles também é um elemento positivo. 2ª – Se a e b pertencem a P, então $a \cdot b$ pertence a P, ou seja, o produto de dois elementos do corpo K positivos é um elemento de K positivo. 3º – Se a pertence a K, então verifica uma, e somente uma das seguintes propriedades $a \in P$ ou, - $a \in P$" (Cruz, 2011, p. 58-59).

[9] "Um corpo ordenado K é dito completo, se todo subconjunto não vazio X⊂ K, limitado superiormente, possui supremo em K, da mesma forma, se um subconjunto Y⊂ K for limitado inferiormente, tem que possuir ínfimo" (Cruz, 2011, p. 78).

médio [...] no intuito de contribuir para uma reflexão do que poderia ser trabalhado em Análise Real" (p. 46), o autor enuncia axiomas e demonstra teoremas associados às operações de adição e de multiplicação, ressaltando que, "numa visão de sala de aula, muitos questionamentos podem surgir na aplicação e na validade de algumas operações, por exemplo, quanto é $0 \cdot 2$?" (p. 49-50). Ele ainda aponta que a busca de alternativas para responder a esses questionamentos passa pelo conhecimento da razão pela qual a multiplicação entre dois fatores em que um deles é zero resulta em zero, enunciando e demonstrando teorema[10] a respeito desse tópico. A demonstração envolve a aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e a unicidade do elemento neutro da adição, proposições as quais, a partir da ressalva do autor, o professor também pode utilizar com alguma adaptação, mas seguindo um raciocínio análogo para justificar, por meio de números, a propriedade em questão.

Ainda segundo o autor, "outro questionamento, que é muito comum no ensino fundamental e no ensino médio é, por que não se pode dividir por zero? Ou, quanto é $\frac{1}{0}$?" (Cruz, 2011, p. 56). Cruz evidencia a inexistência desse cálculo ao destacar que, devido à estrutura de corpo dos números reais, $\frac{1}{0}$ seria o inverso multiplicativo de zero, logo, o produto entre $\frac{1}{0}$ e zero seria 1, o que contradiz a constatação anterior: todo número multiplicado por zero resulta em zero.

Desse modo, em Cruz observa-se uma possível articulação entre a estrutura de corpo dos números reais e o ensino dos números reais e suas propriedades, na qual o autor ressalta dúvidas recorrentes em sala de aula e associa-as a demonstrações específicas. Percebe-se, por exemplo, na justificativa da impossibilidade da divisão por zero, a oportunidade de recorrer a aspectos do conteúdo aos quais os alunos podem já ter sido apresentados, o que pode potencializar sua aprendizagem.

Em seu trabalho, Oliveira (2017, p. 5) "tem como objetivo geral, estabelecer conexões entre conceitos aprendidos pelo aluno de licenciatura na disciplina de Análise Matemática na reta e os conceitos usados pelo professor de Matemática do Ensino Médio em sala de aula". Entre os objetivos específicos elencados pela autora, salienta-se, no âmbito deste artigo, a análise do modo como livros didáticos têm trabalhado os números reais, conforme relatado por ela: "abordamos as ideias veladas de completude ensinadas nos livros didáticos de matemática do ensino médio" (p. 6). Baseada nessa abordagem, a autora traz uma relação entre as ideias identificadas nos materiais e o modo "como a completude é trabalhada em livros de Análise

[10] "Qualquer que seja x, pertencente a K, $x \cdot 0 = 0$" (Cruz, 2011, p. 50).

Real usados nos cursos de licenciatura" (p. 6). É nesse contexto que é selecionada uma possível articulação entre o Teorema dos Intervalos Encaixantes[11] (TIE) e o ensino da noção de completude na reta real na Educação Básica, como será descrito a seguir.

Segundo a autora, as ideias veladas de completude nos livros didáticos de matemática do Ensino Médio estão relacionadas com a representação de raízes quadradas na reta real, em específico a $\sqrt{2}$. Oliveira (2017, p. 49) acentua que alguns livros didáticos de matemática lidam com a questão a partir do fato de que "o número $\sqrt{2}$ é construtível, pois existe um segmento de comprimento $\sqrt{2}$, ou seja, existe um ponto na reta que é $\sqrt{2}$" que se nota ao construir, sob a reta real, um quadrado de lado unitário cuja diagonal mede $\sqrt{2}$, utilizando apenas régua não graduada e compasso – a partir disso, a localização da $\sqrt{2}$ é determinada na reta real.

No entanto, é apresentado pela autora que existem números que não são construtíveis, isto é, não é possível a construção com régua não graduada e compasso de um segmento cuja medida é dada por algum desses números, assim, "a impressão que os livros do ensino médio nos passam, de que todos os números podem ser marcados na reta real, é falsa" (Oliveira, 2017, p. 49), o que levanta questionamentos a respeito da existência de números que não são construtíveis, considerando que marcá-los na reta real não é possível.

Nesse sentido, Oliveira destaca que é possível identificar de forma velada o uso de intervalos encaixantes nos livros didáticos para aproximações da representação decimal de números irracionais, o que é ilustrado pela Figura 2, a seguir, retirada da obra analisada por Oliveira, intitulada *Matemática: contexto & aplicações*, do autor Dante (2013).

Figura 2: Aproximação da $\sqrt{2}$ utilizando, de forma velada, intervalos encaixantes

A pergunta é: que número, elevado ao quadrado, resulta em 2? Com o uso de uma calculadora, podemos obter parte da representação decimal do número fazendo **aproximações sucessivas**.

$$\sqrt{2} = ?\left\langle \begin{matrix} 1^2 = 1 \text{ (menor do que 2)} \\ 2^2 = 4 \text{ (maior do que 2)} \end{matrix} \right\rangle \sqrt{2} \text{ está entre 1 e 2}$$

$$\sqrt{2} = ?\left\langle \begin{matrix} (1{,}4)^2 = 1{,}96 \text{ (menor do que 2)} \\ (1{,}5)^2 = 2{,}25 \text{ (maior do que 2)} \end{matrix} \right\rangle \sqrt{2} \text{ está entre 1,4 e 1,5}$$

$$\sqrt{2} = ?\left\langle \begin{matrix} (1{,}41)^2 = 1{,}9881 \text{ (menor do que 2)} \\ (1{,}42)^2 = 2{,}0164 \text{ (maior do que 2)} \end{matrix} \right\rangle \sqrt{2} \text{ está entre 1,41 e 1,42}$$

$$\sqrt{2} = ?\left\langle \begin{matrix} (1{,}414)^2 = 1{,}999396 \text{ (menor do que 2)} \\ (1{,}415)^2 = 2{,}002225 \text{ (maior do que 2)} \end{matrix} \right\rangle \sqrt{2} \text{ está entre 1,414 e 1,415}$$

Fonte: Dante (2013, p. 20)

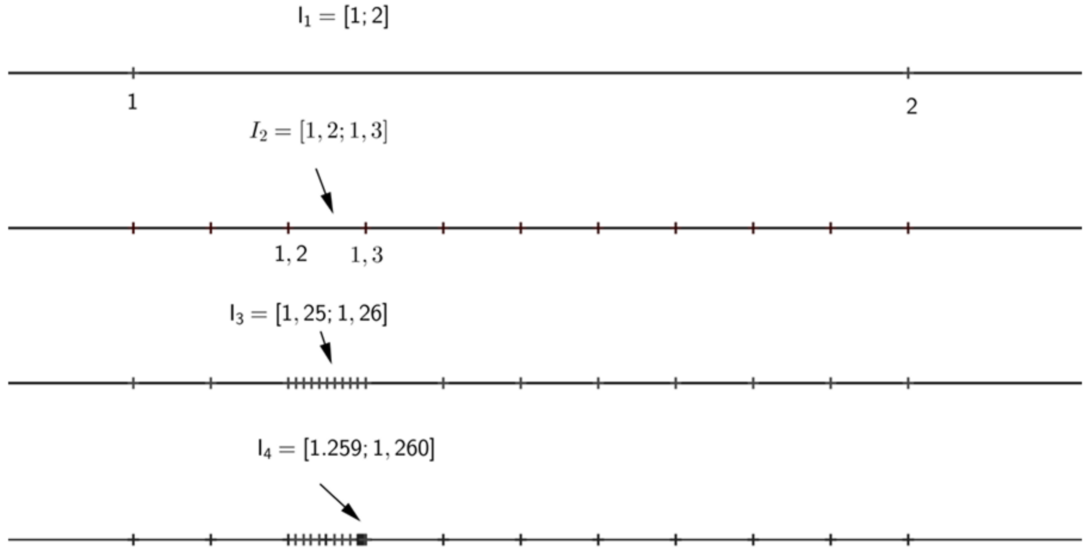
[11] "Dada uma sequência $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$ de intervalos fechados encaixantes cujos comprimentos tendem para zero, temos $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{c\}, c \in R$" (Oliveira, 2017, p. 68).

Desse modo, Oliveira (2017, p. 70) traz a ideia de que, enquanto o fato de $\sqrt{2}$ ser construtível justifica que as aproximações sucessivas vão chegar a um número, no caso dos números que não são construtíveis, a exemplo da $\sqrt[3]{2}$, é o TIE que

> realmente nos garante que o processo usado pelos autores nos livros de ensino médio [aproximação decimal de números irracionais não-construtíveis] chegará a algum número [...] por mais que no mundo físico não sejamos capazes de marcá-lo exatamente, podemos encontrar uma aproximação tão boa quanto desejamos.

E conclui: "se não podemos construir o número $\sqrt[3]{2}$, o que me garante que esse número existe? A resposta é o TIE" (Oliveira, 2017, p. 71). A Figura 3, a seguir, ilustra esse fato.

Figura 3: Localização aproximada do número $\sqrt[3]{2}$ usando intervalos encaixantes



Fonte: Oliveira (2017, p. 75)

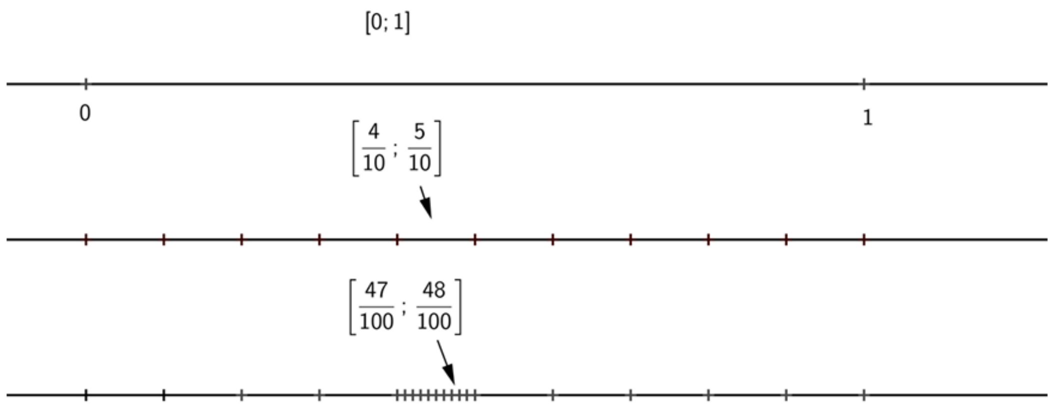
Apesar da $\sqrt[3]{2}$ não ser construtível, o cálculo de aproximações sucessivas, conforme exemplificado na Figura 2 para a $\sqrt{2}$, pode ser feito para determinar extremidades de intervalos encaixantes contendo a $\sqrt[3]{2}$. Esses intervalos, ao serem representados na reta real, ilustram que, mesmo não sendo construtível, a $\sqrt[3]{2}$ também está associada a um ponto da reta real.

No que diz respeito às aplicações do TIE no contexto do Ensino Médio, a autora argumenta que o teorema não está apenas relacionado a um método de aproximação da representação decimal de um número irracional, mas também a um procedimento para localizar com alguma precisão os números racionais na reta real:

> Sabemos que todos os números racionais podem ser construídos sobre a reta: no Exemplo 3.3, construímos o número $\frac{18}{7}$. Naquele caso, foi necessário dividirmos um intervalo em 7 sete partes iguais [a respeito de um método para a construção geométrica do número $\frac{18}{7}$]. O procedimento adotado, embora útil e válido para qualquer $\frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, pode se tornar muito trabalhoso, pois se n for grande, teremos que dividir o intervalo em uma grande quantidade de subintervalos (Oliveira, 2017, p. 72).

Para ilustrar, a autora, utilizando os intervalos encaixantes, também localiza com determinada precisão o número $\frac{41}{87}$ na reta real, número construtível cujo respectivo segmento tem processo de construção trabalhoso, pois demandaria a divisão de um determinado segmento em 87 partes iguais para representar a localização exata do número na reta real. A Figura 4 mostra essa localização aproximada.

Figura 4: Localização aproximada do número $\frac{41}{87}$ usando intervalos encaixantes



Fonte: Oliveira (2017, p. 73)

O procedimento para aproximar a localização desse número na reta se inicia com a determinação de um intervalo inicial com extremidades de números inteiros, no caso, o 0 e o 1. Após isso, o segmento de reta associado ao intervalo $[0; 1]$ é dividido em 10 partes iguais, cada uma de medida igual a $\frac{1}{10}$. Assim, verifica-se que $\frac{4}{10} < \frac{41}{87}$ e que $\frac{41}{87} < \frac{5}{10}$, e o intervalo encaixante $\left[\frac{4}{10}; \frac{5}{10}\right]$ é determinado. Em seguida, divide-se o segmento de reta correspondente ao intervalo $\left[\frac{4}{10}; \frac{5}{10}\right]$ em 10 partes iguais, cada uma de medida igual a $\frac{1}{100}$, e verifica-se que $\frac{47}{100} < \frac{41}{87}$ tal como $\frac{41}{87} < \frac{48}{100}$, e o intervalo encaixante $\left[\frac{47}{100}; \frac{48}{100}\right]$ de medida igual a $\frac{1}{100}$ é obtido.

Desse modo, a autora destaca que “os intervalos encaixantes podem ser facilmente utilizados nas salas de aula de ensino médio como um método para encontrar uma localização aproximada de números reais" (Oliveira, 2017, p. 81) e faz considerações em relação ao ensino da definição de corpo completo associada ao Axioma de Dedekind em detrimento do ensino do TIE nas aulas de Análise Real na licenciatura em Matemática, "porque o axioma requer o conceito de supremo, o que foge às expectativas de ser visto no Ensino Médio, aparentando uma distância enorme entre assuntos da Universidade e do Ensino Médio" (p. 82). A partir desses argumentos, Oliveira (2017, p. 82) propõe ao professor formador "definir que o conjunto dos números reais é completo por nele valer o TIE", pois são conceitos equivalentes.

Portanto, Oliveira evidencia uma impressão equivocada que se pode ter em materiais didáticos do Ensino Médio a respeito da completude dos números reais, recorrendo ao TIE como um meio para o professor da Educação Básica lidar com isso.

Por fim, o apontamento da autora a respeito do ensino do TIE em relação ao ensino do Axioma de Dedekind sugere a possibilidade de adequar tópicos de Análise Real tendo em vista o potencial para o estabelecimento de relações com o ensino de matemática na Educação Básica.

Em sua dissertação, Marques (2019, p. 9) realizou "pesquisa bibliográfica em livros didáticos e páginas eletrônicas indicadas para o ensino médio e em livros de Análise Real" no intuito de selecionar tópicos trabalhados no Ensino Médio relacionados às sequências numéricas, que podem ser estudadas em Análise Real. Entre as ações realizadas pela autora em seu trabalho, destaca-se no escopo deste artigo a apresentação de "sugestão de abordagem de ensino para o Ensino Médio, com a preocupação de [...] manter o rigor matemático, mas de forma que se adeque ao nível médio" (p. 10). Essa forma de trabalho é referente ao ensino de tópicos selecionados a partir da pesquisa bibliográfica feita pela autora.

Em sugestão para apresentação de sequências numéricas no Ensino Médio, Marques (2019) ressalta o potencial didático de introduzir o conteúdo de forma contextualizada antes da definição formal. Nessa intenção, sugere ao professor que inicialmente se refira "às sequências como 'listas', para utilizar uma palavra informal que facilite a compreensão dos alunos. Para termos certeza de que a noção de lista é adequada, verificamos sua correspondência com a definição de sequência" (Marques, 2019, p. 45). Assim, são articulados aspectos do ensino de sequências numéricas na Educação Básica, com a definição de sequência numérica[12], tópico de Análise Real.

Na intenção de evidenciar que a ideia de listas para introduzir as sequências numéricas

[12] É definido que uma "sequência numérica é uma função com domínio $\mathbb{N}$, se a sequência for infinita, ou $\{1,2, ..., n\}$, se a sequência for infinita [*sic*] e tiver n elementos, com contradomínio $\mathbb{R}$" (Marques, 2019, p. 53).

no Ensino Médio é adequada, a autora argumenta que:

> - O domínio é um conjunto de números naturais, os quais determinam a posição do termo (o 1 está relacionado ao primeiro elemento, o 2 ao segundo elemento e assim sucessivamente). Se a lista for finita com n elementos, esse domínio será $\{1,2,3, ..., n\}$; se for infinita, o domínio será $\mathbb{N}$;
> - Para apresentar uma situação mais abrangente, consideramos sempre como contradomínio o conjunto R, que inclui todos os elementos que podem ser colocados na lista;
> - A lei de formação da função é a regra que determina qual elemento do contradomínio está sendo associado a cada elemento do domínio. Ressaltamos que essa lei pode ser expressa por uma fórmula matemática ou não (Marques, 2019, p. 53-54).

Além dessa introdução do conteúdo, foi identificado a partir da pesquisa bibliográfica realizada pela autora em materiais didáticos para o Ensino Médio que, "no estudo das potências com expoentes irracionais, da 'soma' dos infinitos termos de uma PG e do cálculo da área do círculo[13], o raciocínio para justificar a existência desses valores é construído basicamente através da construção de sequências monótonas e limitadas", pois, "intuitivamente, é fácil levantar a hipótese de que essas sequências se aproximem cada vez mais de um número, e formalmente conseguimos demonstrar a veracidade dessa hipótese" (Marques, 2019, p. 90).

A respeito do ensino de potência com expoente irracional, Marques apresenta um recorte de livro didático no qual a definição de $3^{\sqrt{2}}$ é questionada e recorre a uma tabela na qual uma coluna contém os valores aproximados de $3^{1,4}$, $3^{1,41}$, $3^{1,414}$, $3^{1,4142}$; e respectivamente em outra coluna, ao lado desses valores, as aproximações de $3^{1,5}$, $3^{1,42}$, $3^{1,415}$ e de $3^{1,4143}$, de tal modo que na primeira coluna os expoentes aumentam indefinidamente e na segunda os expoentes diminuem indefinidamente, afirmando que $3^{\sqrt{2}}$ estará entre o valor aproximado de $3^{1,4142}$ e $3^{1,4143}$ e que, a partir desse raciocínio, se define qualquer potência de expoente irracional. Diante disso, a autora destaca o seguinte:

> Observe que, ao fazer essas aproximações, na realidade estamos construindo duas sequências, uma crescente e outra decrescente. Pelo que vimos no Teorema[14] 7.4, podemos garantir que cada uma das sequências é convergente. Mas como podemos garantir que as duas convergem para o mesmo valor? (Marques, 2019, p. 100).

---

[13] Neste artigo, por conta de raciocínios e resultados semelhantes serem utilizados em relação às outras articulações, esta, do cálculo da área do círculo, não será apresentada.

[14] 7.4 é a numeração utilizada pela autora para se referir ao seguinte teorema: "*Toda sequência monótona limitada é convergente*" (Marques, 2019, p. 95).

Essa garantia, segundo Marques (2019, p. 101), é dada pelo TIE[15], que pode ser relacionado com argumentação feita no material didático, pois "[...] podemos considerar os intervalos com extremidades em cada valor de aproximação por falta e por excesso: (4,655536722; 5,196152423) (4,706965002; 4,758961394) (4,727695035; 4,732891793) (4,72873393; 4,729253463) [...]".

Em considerações sobre o ensino de potências com expoentes irracionais no Ensino Médio a partir do que os materiais didáticos analisados pela autora apresentam, Marques (2019, p. 127) considera como estratégia mais adequada "representar um número irracional x em sua forma decimal e escolher a sequência de números racionais r_n que converge para x", em raciocínio semelhante ao descrito no recorte de livro didático apresentado pela autora, o qual contém os valores aproximados de $3^{\sqrt{2}}$.

Marques (2019, p. 127) sublinha a necessidade de compreensão dos seguintes tópicos pelo professor de matemática que optar por essa abordagem: "a sequência convergente escolhida não era a única possível[16]; ele precisa compreender por que a sequência de potências é convergente"; e afirma que é preciso deixar claro que o procedimento de aproximação da potência não se trata da definição formal do conteúdo, pois, do contrário, os alunos construiriam argumentos inconsistentes para afirmar que esse raciocínio consiste na definição de potência com expoente irracional.

Em sugestão de abordagem para o ensino da "soma"[17] dos infinitos termos de uma progressão geométrica a partir dos argumentos utilizados em Análise Real, Marques (2019, p. 138) recomenda que os alunos observem o comportamento da sequência de potências q^n, com $0 < q < 1$ e n crescente, numericamente ou graficamente, como meio para convencê-los a respeito da convergência da sequência de potências para zero:

> Para isso, é possível criar "duelos" entre os alunos: um escolhe um valor m pequeno e o segundo escolhe um n tão grande que $\mathrm{q}^{\mathrm{n}} < \mathrm{m}$. Eles devem ser convencidos de que sempre existirá um n para o qual isso acontece e que, para todo $\mathrm{n}' > \mathrm{n}$, também teremos $\mathrm{q}^{\mathrm{n}'} < \mathrm{m}$.

Assim, o aluno também deve ser levado a perceber que, conforme q^n se aproxima de zero, a expressão das somas parciais $S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$ se aproximará de $\frac{a_1}{1-q}$, e é "importante

---

15 "*Dada uma sequência* $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$ *de intervalos fechados encaixantes cujos comprimentos tendem para zero, temos* $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{c\}, c \in \mathbb{R}$" (Marques, 2019, p. 100).

16 Esse destaque é devido ao seguinte teorema: "Dados uma sequência de números racionais (r_n) que converge para um $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e um número $a > 0$,a sequência de potências (a^{r_n}) será convergente" (Marques, 2019, p. 125).

17 Segundo Marques (2019), não é possível definir a soma de infinitos termos, logo, a expressão não é adequada.

destacar que essa não é uma 'substituição' de q^n por zero, mas sim uma aproximação cada vez mais precisa" (Marques, 2019, p. 138). Nesse sentido, é possível inferir que a referida importância de enfatizar que não se trata de uma substituição é fundamentada em ideias associadas ao conceito de limite de uma sequência numérica, tópico de Análise Real.

Tal como em outras sugestões, Marques (2019, p. 138) reafirma a importância de os alunos terem ciência de que os cálculos não configuram uma demonstração, mas sim um levantamento de hipóteses – "esse esclarecimento evita confusões a respeito das demonstrações matemáticas".

Em síntese, Marques faz propostas de ensino contextualizadas no Ensino Médio a partir da definição de sequências numéricas, do TIE e da convergência de sequências, articuladas respectivamente com o ensino de sequências numéricas, potência com expoente irracional e "soma" dos infinitos termos da progressão geométrica na Educação Básica.

Nessas possíveis articulações, embora os processos lógico-dedutivos associados à Análise Real em si não estejam presentes nas abordagens sugeridas, infere-se que as ideias e conceitos neles contidos embasam as justificativas para os alunos do Ensino Médio na introdução do conteúdo matemático. Desse modo, o professor que se apropria, por exemplo, das ideias propostas por Marques, pode potencializar seu ensino ao trazer para seus alunos justificativas e argumentos possivelmente mais consistentes devido aos processos lógico-dedutivos a eles associados.

Também se evidencia que o potencial de articulação no estudo de sequências numéricas em Análise Real não é limitado ao ensino de sequências na Educação Básica, estende-se ainda à geometria[18] e às operações numéricas, este último conteúdo conforme visto na proposta para o ensino de potência com expoente irracional.

Weber (2021, p. 15) propõe "uma atividade conectando os conteúdos de Análise Real e o ensino básico para uma turma de licenciandos em Matemática" que já cursaram um semestre da disciplina de Análise Real. Para isso, o autor baseia-se em modelo proposto por Wasserman *et al.* (2016), que tem por princípio o estudo de Análise Real na Licenciatura em Matemática motivado por situações consideradas plausíveis no contexto de sala de aula na Educação Básica.

O objetivo da atividade elaborada é "conectar o conteúdo do tópico Teorema dos Intervalos Encaixantes com o conteúdo trabalhado no primeiro ano do ensino médio acerca da construção da reta numérica" (Weber, 2021, p. 50), e ela é apresentada da forma mostrada na Figura 5.

[18] Conforme possível articulação com a área do círculo omitida neste artigo.

Figura 5: Atividade apresentada em Weber (2021)

Tópico: Teorema dos Intervalos Encaixantes

Após uma aula sobre os conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e irracionais) e a apresentação da reta numérica para uma turma do ensino médio, um aluno faz a seguinte pergunta: "Professor, eu consigo marcar qualquer número na reta numérica?"

Etapa 1: (*Building up from practice*)[19]
1. Observe a seguinte afirmação: "É possível marcar qualquer número Real na reta numérica." O que você pensa sobre essa afirmação? Você consegue pensar em algum resultado que confirme ou negue essa afirmação?
2. O que você acha da seguinte afirmação: "Mesmo que não possamos marcar com exatidão alguns números na reta numérica, podemos marcá-los tão próximos quanto queiramos do número em questão".
3. Ache aproximações para o número real $\sqrt[3]{2}$ de pelo menos 5 casas decimais.
4. Para cada aproximação decimal encontrada, é possível tomar um intervalo fechado que contém o número $\sqrt[3]{2}$. Reflita se é possível sempre tomar um intervalo "menor" que está contido no intervalo anterior. Existe algum resultado que garanta que este processo, no limite, nos levará ao número $\sqrt[3]{2}$?

(*Stepping down to practice*)[20]
1. Você consegue ver conexões com os resultados estudados na etapa anterior com a tarefa de responder à pergunta do aluno de ensino médio?
2. Você acha apropriado mencionar alguns dos resultados estudados na etapa anterior para o aluno de ensino médio? Se sim, qual resultado você mencionaria e de que forma você os mencionaria?
3. Elabore uma resposta para a pergunta feita pelo aluno de ensino médio, tendo em vista os resultados indicados nas perguntas anteriores.

Fonte: Weber (2021, p. 50-51)

Em comentários sobre as intenções específicas de cada item da atividade, Weber (2021, p. 52) ressalta que no primeiro item da etapa *Building up from practice* "o que nos importa não é o fato de que esses números não sejam construtíveis, mas sim que podemos representá-los na reta numérica, mesmo não conhecendo seu exato lugar". Já no segundo item, o autor tem por objetivo enfatizar a possibilidade de "marcar um ponto tão próximo quanto se queira dele. Mais do que isso, que a marcação aproximada dos números irracionais não construtíveis não interfere no conceito de reta completa e, muito menos, no raciocínio lógico acerca da localização dos números na reta" (p. 53).

No terceiro item, é pretendido que o graduando, "mesmo que implicitamente, ao fazer as aproximações usando dos algoritmos de aproximação construirá intervalos que contêm o

19 É uma etapa baseada no modelo de Wasserman *et al.* (2016), cujo "objetivo é olhar primeiramente para o ambiente escolar e de lá retirar a motivação para trabalhar um tópico que se conecte com a disciplina Análise Real" (Weber, 2021, p. 47).

20 Baseada no modelo de Wasserman *et al.* (2016), essa etapa se inicia após o estudo "do conteúdo matemático avançado evidenciado na situação prática de ensino. O objetivo é reconsiderar a situação de sala de aula apresentada inicialmente esclarecendo explicitamente os objetivos pedagógicos pretendidos" (Weber, 2021, p. 47-48).

número irracional $\sqrt[3]{2}$ em seu interior" (Weber, 2021, p. 53). Relacionado com essa intencionalidade, no item seguinte, o objetivo é de "chegar ao tópico desta tarefa, o Teorema dos Intervalos Encaixantes. Queremos mostrar que [...] este mesmo teorema nos garante que, ao repetir indefinidamente o processo, haverá um número ao final" (p. 54), e cabe, nesse momento, a retomada de conceitos e resultados "que envolvem as noções de supremo e ínfimo (ou de limite de sequências) e o Teorema dos Intervalos Encaixantes" (p. 54).

Na primeira pergunta de *Stepping down to practice*, a intenção "é explicitar toda conexão que possa ser feita entre os conteúdos de Análise Real e os de ensino médio" (Weber, 2021, p. 54), com possibilidade de uma discussão que vai além do tópico de conjuntos numéricos, a qual, segundo o autor, pode ser trabalhada em futuras atividades. O objetivo de Weber no segundo item é avaliar o que o licenciando considera muito abstrato e o que ele considera relevante para os alunos da escola. No último item, pretende-se que o licenciando tenha conseguido elaborar uma resposta ao aluno de Ensino Médio de maneira assertiva e "perceber a estreita conexão entre o conteúdo da escola básica e um dos tópicos estudados na disciplina de Análise" (p. 55). Além disso, o autor sugere o uso de *softwares* como o GeoGebra para a marcação de pontos como recurso para potencializar a explicação de que uma aproximação de poucas casas decimais para um número irracional e outra aproximação com várias casas decimais representam pontos "tão próximos que é difícil diferenciá-los" (p. 55).

Assim, Weber faz proposta de articulação para ser utilizada com licenciandos em Matemática enquanto, abordando o TIE e a reta real, se aproxima do trabalho feito por Oliveira (2017), que faz uma possível articulação direcionada a professores da Educação Básica para ensinar alunos do Ensino Médio utilizando argumentos associados à Análise Real. Em Weber (2021), o autor se utiliza de um modelo de ensino cuja proposta é o trabalho com o conhecimento em Análise Real de tal modo que auxilie na tomada de decisão em situações de ensino. De certo modo, o trabalho de Oliveira (2017) pode ser visto como um material de estudo do professor para responder à possível pergunta: "Professor, eu consigo marcar qualquer número na reta numérica?" (Weber, 2021, p. 50).

Apesar de apenas algumas possíveis articulações estarem presentes em trabalhos com propostas de ensino direcionadas ao professor formador, há de se destacar o potencial de adaptação de outras possíveis articulações identificadas para o ensino de Análise Real na Licenciatura em Matemática, que podem oportunizar um distanciamento da lacuna da "desarticulação entre formação específica e pedagógica" apontada por Leite e Passos (2020, p. 7).

Uma disciplina de Análise Real na qual possíveis articulações com o ensino de matemática na Educação Básica se fazem presentes devido às ações do professor formador não seria uma das disciplinas "projetadas e executadas independentemente das outras disciplinas" (Moreira, 2012, p. 1140), o que indica uma possibilidade de avanço na superação da lógica subjacente da estrutura *3+1* ainda presente em cursos de Licenciatura em Matemática, segundo Moreira.

5 Considerações

Neste artigo, o objetivo foi selecionar e descrever, a partir de uma revisão sistemática de literatura, possíveis articulações entre tópicos de Análise Real e o ensino de matemática na Educação Básica. Na possível articulação entre a estrutura de corpo dos números reais e o ensino dos números reais e suas propriedades (Cruz, 2011), há a mobilização do conhecimento associado à demonstração dessas propriedades como uma forma de lidar com questionamentos que podem surgir dos alunos a respeito da validade dessas propriedades, enquanto na possível articulação entre o TIE e o ensino da ideia de completude dos números reais (Oliveira, 2017) utiliza-se de conhecimentos associados ao teorema como uma forma de lidar com uma ideia velada dos números reais em materiais didáticos para o Ensino Médio, fundamentando uma justificativa para a existência de números não construtíveis na reta real.

Já em Marques (2019) há a possível articulação entre: a definição de sequências numéricas e o ensino de sequências numéricas, em que a definição formal fundamenta o uso de determinada ideia informal para a apresentação do conteúdo matemático; o TIE e o ensino de potências com expoente irracional, de tal modo que o TIE fundamenta uma argumentação para a existência da potência com expoente irracional; a convergência de sequências e o ensino da "soma" dos infinitos termos de uma progressão geométrica, em que a noção de convergência destaca a ideia de aproximações tão precisas quanto se deseja, e não de uma substituição.

Em Weber (2021) o TIE é associado à elaboração de uma resposta a uma possível dúvida de um aluno em um contexto de ensino sobre a construção da reta numérica. Desse modo, o autor utiliza-se do mesmo tópico de Análise Real que Oliveira (2017) e Marques (2019), tendo o TIE como uma justificativa para a existência da $\sqrt[3]{2}$ na reta real, apesar de não ser possível marcá-la com exatidão.

Pode-se observar que, entre as possíveis articulações selecionadas e descritas neste artigo, em nenhum dos tópicos de Análise Real estão presentes conceitos como derivadas e integrais, que de modo geral fazem parte de disciplinas de Análise Real. Esses tópicos não foram articulados com o ensino de matemática na Educação Básica em nenhum dos trabalhos analisados e não foram discutidos na maioria dos trabalhos não selecionados para o *corpus*. A busca por possíveis articulações entre esses tópicos, e outros também de Análise Real, não presentes neste artigo, e o ensino de matemática na Educação Básica pode motivar investigações futuras.

A seleção de quatro TCC a partir de uma busca feita em mais de cinco bases de dados aponta para a falta de produções que explicitem possíveis relações entre teoria e prática no contexto da disciplina de Análise Real, dado que tais articulações são complexas para elaboração própria tanto pelo futuro professor (Moreira; Cury; Vianna, 2005) quanto pelo próprio professor formador da disciplina.

Portanto, ressalta-se como oportunidade para a comunidade acadêmica da Matemática buscar, em conjunto com professores de matemática que atuam na Educação Básica, uma consolidação do trabalho intencional de realização de articulações de Análise Real com o ensino na Educação Básica. A colaboração entre doutores em Matemática e licenciados ou licenciandos em Matemática apresentou resultados como os trabalhos selecionados e descritos neste artigo, que podem potencializar ações formativas em uma disciplina de Análise Real na licenciatura.

Desse modo, a comunidade acadêmica da área de Matemática, geralmente presente no corpo docente dos cursos de Licenciatura em Matemática, tem apresentado iniciativas diante da responsabilidade pela formação do professor de matemática da Educação Básica. Contudo, como os professores de Análise Real são, de modo geral, doutores em Matemática (Otero-Garcia; Baroni, 2015), quatro trabalhos são uma sutil quantidade diante do quantitativo desse corpo docente que atua em praticamente todos os cursos presenciais de Licenciatura em Matemática em instituições públicas (Camargo *et al.*, 2023).

Assim, tal disparidade indica que mais professores que ministram Análise Real como componente formativa – além dos responsáveis pela organização curricular do curso – precisam potencializar o trabalho de proporcionar um ensino de tópicos de Análise Real articulados com o ensino de matemática na Educação Básica, adequando o trabalho com a disciplina para a formação do professor de matemática. Espera-se que este artigo possa contribuir com reflexões nessa direção.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

ALCANTARA, C. **Um estado da arte da pesquisa sobre ensino de Análise Real no Brasil a partir de artigos**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

AZOUBEL, M. S. Como planejar e executar buscas na literatura científica? **Perspectivas em Análise do Comportamento**, [*S. l.*], v. 10, n. 2, p. 256-266, 2020. Disponível em: https://revistaperspectivas.org/perspectivas/article/view/627 Acesso em: 28 ago. 2024.

BOLOGNEZI, R. A. L. **A disciplina de Análise Matemática na formação de professores de matemática para o Ensino Médio**. 2006. 109 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Seção Sesumec. **Parecer CNE/CES n.º 1.302, de 3 de novembro de 2001**. Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. Brasília: MEC, 2001. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf Acesso em: 4 jul. 2023.

BRASIL**.** Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CP 1/2002. Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. **Diário Oficial da União**, Brasília, Seção 1, p. 31, 9 abr. 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília: MEC/SEB, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BROETTO, G. C.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos. O ensino de números irracionais na educação básica e na Licenciatura em Matemática: um círculo vicioso está em curso? **Bolema**, Rio Claro, v. 33, n. 64, p. 728-747, ago. 2019.

CAMARGO, L. B. *et al*. A. A disciplina Análise Real e o futuro professor de matemática: um repensar. **Zetetiké**, Campinas, v. 31, n. 00, p. e023025, 2023. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8667533 Acesso em: 27 ago. 2024.

CRUZ, W. J. **"Os números reais"**: um convite ao professor de matemática do ensino fundamental e do ensino médio. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto e aplicações. vol. 1. São Paulo: Ática, 2013.

ESQUINCALHA, A. C.; BAIRRAL, M. A. Refletindo sobre Análise Real com professores da educação básica em um curso a distância. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, Duque de Caxias, v. 9, n. 3, p. 213-222, 16 dez. 2019.

GARNICA, A. V. M. História Oral e educação matemática. *In*: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (org.) **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 77-98.

LALOR, W. R.; GONÇALVES, T. O. Contribuições das disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática para o fazer profissional do professor de ensino básico. **Ensino da Matemática em Debate**, [*S. l.*], v. 11, n. 1, p. 4-26, 2024. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/55310 Acesso em: 22 ago. 2024.

LEITE, E. A. P.; PASSOS, C. L. B. Considerações sobre lacunas decorrentes da formação oportunizada no curso de Licenciatura em Matemática no Brasil. **Revista de Educação Pública**, Cuiabá, v. 29, p. 1-23, 2 mar. 2020.

MARQUES, C. P. **A importância da Análise Real na formação do professor de matemática do Ensino Médio**: o caso das sequências numéricas. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2019.

MENDES, L. O. R.; PEREIRA, A. L. Revisão sistemática na área de Ensino e Educação Matemática: análise do processo e proposição de etapas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 22, n. 3, p. 196-228, 2020.

MOREIRA, P. C. 3+1 e suas (In)Variantes (Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática). **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 44, p. 1137-1150, 1 dez. 2012.

MOREIRA, P. C.; CURY, H. N.; VIANNA, C. R. Por que análise real na licenciatura? **Zetetiké**, Campinas, v. 13, n. 23, p. 11-42, 2005. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646978 Acesso em: 13 jul. 2023.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. Números racionais: conhecimentos da formação inicial e prática docente na escola básica. **Bolema**, Rio Claro, v. 17, n. 21, p. 1-19, 2004.

OLIVEIRA, G. S.; MIRANDA, M. I.; SAAD, N. S. Metassíntese: uma modalidade de pesquisa qualitativa. **Cadernos da FUCAMP**, Monte Carmelo, v. 19, n. 42, p. 145-156, 2020.

OLIVEIRA, M. M. **Conceitos de Análise Matemática na reta para bem compreender os números reais no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2017.

OTERO-GARCIA, S. C.; BARONI, R. L. S. Questões críticas em ensino de Análise Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n. 3, p. 617-636, 26 nov. 2015.

PICALHO, A. C.; LUCAS, E. R.; AMORIM, I. S. Lógica booleana aplicada na construção de expressões de busca. **AtoZ: Novas Práticas em Informação e Conhecimento**, Curitiba, v. 11, p. 1-1, 11 mar. 2022.

REIS, F. S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise**: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 2001. 302 f. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

SILVA, F. G. S. da. **Ensino de estatística na educação básica em países da América Latina**: uma revisão sistemática. 2020. 110 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

WASSERMAN, N. H.; BUCHBINDER, O.; BUCHHOLTZ, N. Making university mathematics matter for secondary teacher preparation. **Zdm – Mathematics Education**, Berlim, v. 55, n. 4, p. 719-736, 24 maio 2023.

WASSERMAN, N. H. *et al*. Making real analysis relevant to secondary teachers: Building up from and stepping down to practice. **PRIMUS**, Filadélfia, v. 27, n. 6, p. 559-578, 18 out. 2016.

WEBER, M. N. **Uma abordagem da Análise Real para o curso de licenciatura sob a perspectiva da aprendizagem situada**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2021.