revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Mobilização do pensamento geométrico em um contexto de Ensino Exploratório: uma análise por meio da teoria de van Hiele

DOI: https://doi.org/10.33871/ rpem.2025.14.35.10784

Elisângela Udeliza Toginho[1]
Henrique Rizek Elias[2]

Resumo: O objetivo deste artigo foi analisar as mobilizações do pensamento geométrico de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental ao trabalharem com tarefas matemáticas que visavam introduzir o Teorema de Pitágoras em um ambiente de Ensino Exploratório. A pesquisa foi realizada ao longo seis aulas de Matemática de uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de um estado da região Sul do Brasil. Os dados, analisados à luz da teoria de van Hiele, contêm diálogos entre a professora e um grupo formado por quatro alunos. Os resultados apontam que os alunos podem tratar de uma maneira inicial, com base na visualização, ao lidarem conceitualmente com a noção de triângulo focando apenas em seu formato e, com o auxílio de materiais manipuláveis, avançarem para um pensamento mais abstrato de dedução informal ao lidarem com características relacionadas a determinados tipos de triângulos, como o Teorema de Pitágoras para triângulos retângulos. Por fim, apresenta-se reflexões sobre desafios do Ensino Exploratório que impactaram a mobilização do pensamento geométrico dos alunos.
Palavras-chave: Pensamento Geométrico; Ensino Exploratório; Ensino Fundamental; Teorema de Pitágoras.

Manifestations of geometric thinking in an Exploratory Teaching context: an analysis through the van Hiele Theory

Abstract: This article aimed to analyze the manifestations of geometric thinking in 9th-grade middle school students while engaging in mathematical tasks designed to introduce the Pythagorean Theorem within an Exploratory Teaching environment. The study was conducted over six Mathematics lessons with a 9th-grade class in a public school located in a state in southern Brazil. The data collected, examined through van Hiele's theory, consists of dialogues between the teacher and a group of four students. The findings suggest that students initially approach the concept of triangles using visualization, focusing solely on their shapes. With the assistance of manipulative materials, they gradually advance toward more abstract thinking, employing informal deduction when dealing with properties specific to certain types of triangles, such as the Pythagorean Theorem applied to right triangles. Finally, the study offers reflections on the challenges of exploratory teaching and its influence on the development of students' geometric thinking.
Keywords: Geometric Thinking; Inquiry-based Teaching; Middle School; Pythagorean Theorem.

[1] Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) *multicampi* Cornélio Procópio e Londrina. Professora da Secretaria de Educação do Estado do Paraná (SEED). E-mail: etoginho@alunos.utfpr.edu.br.

[2] Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Professor do Departamento Acadêmico de Matemática (DAMAT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) e docente permanente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT) da UTFPR *multicampi* Cornélio Procópio e Londrina. E-mail: henriqueelias@utfpr.edu.br.

1 Introdução

A escolha por investigar sobre Geometria, em particular sobre o Teorema de Pitágoras[3], foi da primeira autora deste artigo, a partir de sua prática docente e da percepção de que muitos de seus alunos têm dificuldades na aprendizagem desse tema. Para além do interesse pessoal, há relevância acadêmica de se realizar pesquisas a respeito do pensamento geométrico de alunos relacionado a conceitos matemáticos. Pesquisas como Leivas (2012; 2017), Cargnin, Guerra e Leivas (2019) e Mansilla (2011) são exemplos de investigações realizadas especificamente sobre a aprendizagem do Teorema de Pitágoras por parte dos alunos. Já a pesquisa de Nascimento (2025) apresenta diferentes demonstrações para o Teorema de Pitágoras.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) também indica a necessidade de se desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Conforme a BNCC, “Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes” (Brasil, 2018, p. 271). Tem-se, portanto, a necessidade de se continuar investigando formas de promover o desenvolvimento do pensamento geométrico em alunos nos diferentes níveis de ensino e atrelado a diferentes conceitos matemáticos.

A teoria do desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele tem sido uma abordagem relevante para esse tipo de investigação, pois busca entender como os alunos constroem seus pensamentos geométricos em diferentes níveis de desenvolvimento cognitivo. De acordo com van de Walle (2009, p. 439, destaque do autor),

> Nem todas as pessoas pensam sobre as ideias geométricas da mesma maneira. Certamente, nós não somos todos iguais, mas somos todos capazes de crescer e desenvolver nossa habilidade de pensar e raciocinar em contextos geométricos. A pesquisa de dois educadores holandeses, Pierre van Hiele e Dina van Hiele-Geldof, tem fornecido *insights* quanto às diferenças no pensamento geométrico e como essas diferenças são estabelecidas.

Na teoria de van Hiele, os alunos passam por cinco níveis distintos[4] de pensamento geométrico, cada um caracterizado por diferentes formas de pensar sobre as figuras e propriedades geométricas (Kallef *et al*., 1994). Essa teoria enfatiza a necessidade de se

---

[3] Nesta pesquisa, utilizamos o termo “Teorema de Pitágoras”, mas reconhecemos, conforme aponta Roque (2012, p. 78), que a “escassez das fontes, somada à convergência interessada dos únicos textos disponíveis, nos permite duvidar até mesmo da existência de um matemático de nome Pitágoras”. De acordo com a autora, não se sabe ao certo se a Matemática atribuída a Pitágoras é uma criação de um matemático chamado Pitágoras, de integrantes de uma escola antiga chamada pitagórica (mas não de Pitágoras), ou dos neoplatônicos e neopitagóricos da Antiguidade (Roque, 2012).

[4] Mais detalhes sobre este referencial teórico na próxima seção.

considerar o nível de pensamento do aluno ao planejar tarefas e abordagens de ensino em Geometria.

Uma abordagem de ensino apropriada para promover o desenvolvimento do pensamento geométrico é a do Ensino Exploratório, pois esta visa criar um ambiente de aprendizagem interativo, em que os alunos são incentivados a explorar, investigar e discutir conceitos matemáticos de forma ativa e autônoma (Canavarro, 2011). Nessa abordagem, os alunos são colocados no centro do processo de aprendizagem, sendo desafiados a construir suas próprias ideias e soluções, o que promove um entendimento mais profundo e significativo dos conceitos abordados.

Na presente pesquisa[5], a teoria de van Hiele foi empregada para planejar e desenvolver tarefas matemáticas que buscam conduzir à construção e à compreensão do Teorema de Pitágoras pelos alunos. Tais tarefas foram trabalhadas em aulas de Matemática seguindo a abordagem do Ensino Exploratório. Foram conduzidas seis aulas, cada uma com a extensão de 50 minutos, junto a uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental, em uma instituição de ensino estadual um estado da região Sul do Brasil. Essas aulas foram realizadas no mês de dezembro de 2022.

Diante disso, esta pesquisa tem como objetivo *analisar as mobilizações do pensamento geométrico de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental ao trabalharem com tarefas matemáticas que visavam introduzir o Teorema de Pitágoras em um ambiente de Ensino Exploratório*. Os objetivos específicos foram: (i) planejar, coletivamente, tarefas matemáticas tanto para resgatar conhecimentos que os alunos já tinham sobre triângulos (por exemplo, a condição de existência de um triângulo) como para introduzir o Teorema de Pitágoras; (ii) implementar essas tarefas por meio do Ensino Exploratório, de modo a promover um ambiente propício para a mobilização do pensamento geométrico.

2 Pensamento Geométrico

De acordo com Kaleff *et al*. (1994, p. 3), “O Modelo de van Hiele do pensamento geométrico se coloca como guia para aprendizagem e para avaliação das habilidades dos alunos em geometria”. Segundo os autores, esse modelo descreve as características do pensamento geométrico a partir de cinco níveis de compreensão: visualização (ou reconhecimento), análise,

---

[5] Esta pesquisa trata-se de um recorte da dissertação de mestrado profissional da primeira autora (Toginho, 2024). No entanto, para este artigo, as análises dos dados foram revisadas e refinadas.

dedução informal (ou ordenação), dedução formal e rigor. Para descrever esses níveis, nos fundamentamos em Kaleff *et al*. (1994, p. 4-5):

> NÍVEL 0 - VISUALIZAÇÃO ou RECONHECIMENTO: Neste estágio inicial, os alunos raciocinam basicamente por meio de considerações visuais. Conceitos geométricos são levados em conta como um todo, sem considerações explícitas das propriedades dos seus componentes. Assim, figuras geométricas são reconhecidas pela aparência global, podendo ser chamadas de triângulo, quadrado, etc., mas os alunos não explicitam as propriedades de identificação das mesmas. Um aluno, neste nível, pode aprender o vocabulário geométrico, identificar formas específicas, reproduzir uma figura dada, etc.
> NÍVEL 1 - ANÁLISE: Neste nível, os alunos raciocinam sobre conceitos geométricos, por meio de uma análise informal de suas partes e atributos através de observação e experimentação. Os estudantes começam a discernir características das figuras geométricas, estabelecendo propriedades, que são então usadas para conceituarem classes e formas. Porém eles ainda não explicitam interrelações entre figuras ou propriedades.
> NÍVEL 2 - DEDUÇÃO INFORMAL ou ORDENAÇÃO: Neste nível, os alunos formam definições abstratas, podendo estabelecer inter-relações das propriedades nas figuras (por exemplo, um quadrilátero com lados opostos paralelos necessariamente possui ângulos opostos iguais) e entre figuras (por exemplo, um quadrado é um retângulo porque ele possui todas as propriedades do retângulo). Podem também distinguir entre a necessidade e a suficiência de um conjunto de propriedades no estabelecimento de um conceito geométrico. Assim, classes de figuras são reconhecidas, inclusão e interseção de classes são entendidas; entretanto, o aluno neste nível não compreende o significado de uma dedução como um todo, ou o papel dos axiomas. Provas formais podem ser acompanhadas, mas os alunos não percebem como construir uma prova, partindo-se de premissas diferentes.
> NÍVEL 3 - DEDUÇÃO FORMAL: Neste nível, os alunos desenvolvem seqüências de afirmações deduzindo uma afirmação a partir de uma outra ou de outras. A relevância de tais deduções é entendida como um caminho para o estabelecimento de uma teoria geométrica. Os alunos raciocinam formalmente no contexto de um sistema matemático completo, com termos indefinidos, com axiomas, com um sistema lógico subjacente, com definições e teoremas. Um aluno neste nível pode construir provas (e não somente memorizá-las) e percebe a possibilidade de desenvolver uma prova de mais de uma maneira.
> NÍVEL 4 - RIGOR: Neste nível, os alunos avaliam vários sistemas dedutivos com um alto grau de rigor. Comparam sistemas baseados em diferentes axiomas e estudam várias geometrias na ausência de modelos concretos. São capazes de se aprofundarem na análise de propriedades de um sistema dedutivo, tais como consistência, independência e completude dos axiomas.

A teoria de van Hiele destaca a importância do desenvolvimento progressivo do pensamento geométrico, passando pelos diferentes níveis de compreensão. Para tanto, os alunos precisam ser expostos a experiências práticas, desafios e tarefas que os levem a refletir e construir seu pensamento geométrico de maneira gradual. Ao compreender essa progressão, os educadores podem planejar estratégias de ensino que sejam adequadas ao nível de pensamento dos alunos, promovendo uma aprendizagem significativa e duradoura da Geometria.

No que se refere ao papel do professor, para van Hiele,

> [...] o professor pode, por uma seleção adequada de tarefas, criar a situação ideal para o aluno alcançar um nível mais elevado de pensamento. Pode-se, também, afirmar que alcançar um nível mais elevado aumenta consideravelmente o potencial do aluno, ao mesmo tempo que torna muito difícil que um estudante volte a cair a um nível inferior de pensamento (van Hiele, 1990, p. 88 *apud* Leivas, 2017, p. 520).

É importante ressaltar que alcançar um nível mais elevado de pensamento geométrico aumenta significativamente o potencial do aluno. Isso implica que o aluno desenvolva habilidades mais avançadas de resolução de problemas, justificação e argumentação geométrica. Além disso, uma vez que o aluno tenha atingido um nível mais elevado, dificulta-se retroceder para um nível inferior de pensamento geométrico.

3 Ensino Exploratório

O Ensino Exploratório se distingue do chamado ensino direto quando olhamos para os "[...] papéis desempenhados pelo professor e pelos alunos, pelas tarefas que são propostas e como são geridas, e pela comunicação originada na aula" (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013, p. 3). O ensino direto, segundo Oliveira, Menezes e Canavarro (2013), é aquele em que a aula é centrada no professor e o conhecimento é transmitido aos alunos (características do ensino tradicional da Matemática), e o Ensino Exploratório difere dessas características.

> O ensino exploratório da Matemática defende que os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão coletiva. Os alunos têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática. (Canavarro, 2011, p.11).

No Ensino Exploratório, a aula organiza-se em quatro fases: lançamento (introdução) de uma tarefa matemática, exploração (realização) da tarefa pelos alunos, discussão da tarefa e sintetização das aprendizagens matemáticas (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013).

Lançamento (Introdução) da Tarefa Matemática: nessa fase, o professor apresenta aos alunos uma tarefa matemática desafiadora. O objetivo é despertar a curiosidade e a motivação dos alunos, fornecendo um contexto que estimule a exploração e a busca por soluções.

Exploração (Realização) da Tarefa pelos alunos: nessa fase, os alunos são convidados a explorar a tarefa de forma autônoma (individualmente ou em grupos). Eles são encorajados a experimentar diferentes estratégias, testar hipóteses, utilizar materiais manipuláveis e tecnologias, e realizar investigações para resolver a tarefa proposta. O papel do professor é de facilitador, fornecendo orientações e apoio conforme necessário, mas permitindo que os alunos assumam a liderança de sua própria aprendizagem.

Discussão da Tarefa: nessa fase, o professor deve promover a discussão coletiva da tarefa. Os alunos têm a oportunidade de compartilhar suas descobertas, apresentar suas estratégias, explicar seus raciocínios e discutir diferentes abordagens para resolver a tarefa. O professor desempenha o papel de mediador, conduzindo as discussões e estimulando a participação ativa de todos os alunos. Essa troca de ideias e argumentações matemáticas contribui para o aprofundamento do entendimento dos conceitos e para a construção coletiva do conhecimento.

Sintetização das Aprendizagens Matemáticas: nessa última fase ocorre a síntese das aprendizagens matemáticas alcançadas. O professor recapitula os principais conceitos, estratégias e conclusões discutidos durante a aula, destacando as ideias essenciais e as relações matemáticas envolvidas na tarefa. Os alunos têm a oportunidade de refletir sobre o que aprenderam, consolidar seu conhecimento e fazer conexões com outros conceitos matemáticos. Essa síntese ajuda a reforçar a compreensão dos alunos e a fixação dos aprendizados realizados durante a aula.

Acredita-se, nesta pesquisa, que a abordagem do Ensino Exploratório, por meio dessas quatro fases, tem potencial para oportunizar um ambiente favorável para a mobilização e o desenvolvimento dos diferentes níveis de pensamento geométrico dos alunos.

4 Contexto e procedimentos metodológicos

A pesquisa foi realizada em uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública um estado da região Sul do Brasil[6]. A pesquisadora, docente efetiva desse estado, era a própria professora regente da turma, que era composta por 22 alunos.

A produção dos dados ocorreu ao longo de três dias, totalizando seis aulas de cinquenta minutos cada (duas aulas por dia, isto é, 100 minutos por dia). Entre cada dia de aula, a

[6] A pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisas envolvendo seres humanos da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, sob o número do CAAE: 59064522.0.0000.5547.

pesquisadora e seu orientador conversavam para realizar possíveis adaptações no planejamento da próxima aula, levando em consideração a aula anterior.

O objetivo geral das aulas foi introduzir o Teorema de Pitágoras por meio de tarefas matemáticas. Foram planejadas coletivamente[7] três tarefas matemáticas. Esperava-se que as tarefas permitissem que os alunos: (i) resgatassem conhecimentos prévios que pudessem contribuir, posteriormente, para a compreensão do Teorema de Pitágoras; (ii) explorassem características e propriedades de um triângulo e, em particular, de triângulo retângulo[8]; e (iii) percebessem, por eles próprios, que, no triângulo retângulo, a medida da hipotenusa[9] ao quadrado é igual à soma das medidas de cada cateto ao quadrado.

A tarefa 1 está apresentada no Quadro 1.

Quadro 1 – Tarefa 1: reconhecendo um triângulo

1) Como você explicaria ao seu colega ao lado o que é um triângulo? Descreva com suas palavras em seu caderno.
2) Faça a representação geométrica de um triângulo. Utilizando a régua, meça e anote a medida de cada lado.
3) Com três segmentos de reta é sempre possível formar um triângulo?
4) Como você explicaria para seu colega o que é um triângulo retângulo? Faça a representação geométrica de um triângulo retângulo no seu caderno.

Com os palitos que receberam, montem um Triângulo Retângulo utilizando o molde abaixo.

1) O que vocês perceberam de diferente na construção desse triângulo em relação aos anteriores?
2) Será que é possível construir um triângulo retângulo, com os mesmos segmentos de reta que já foram construídos os outros triângulos anteriores?
3) Com o ângulo de 90º fixado, será que é possível construir esse triângulo retângulo com qualquer outra medida de segmento de reta?
4) Há necessidade de uma medida específica para completar o lado que está faltando?
5) E agora, após encontrarem o segmento de reta que completa o triângulo retângulo, o que perceberam de diferente na construção?

Escreva o que você concluiu com a realização dessa tarefa.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

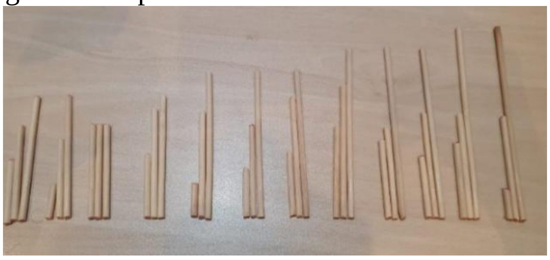
[7] Esse planejamento coletivo ocorreu no âmbito do grupo de pesquisa que os autores deste artigo fazem parte. Tal grupo de pesquisa é composto por professores universitários e professores da Educação Básica.

[8] Definição: Um triângulo é retângulo se contém um ângulo reto.

[9] Definição: Em um triângulo retângulo o maior lado é chamado “hipotenusa” e os outros dois são chamados “catetos”.

A Tarefa 1 tem como objetivo resgatar o conhecimento que os alunos já possuem a respeito do que é um triângulo, da condição de existência[10] de um triângulo e, em particular, do que é um triângulo retângulo. Para tanto, jogos com três palitos de madeira com diferentes comprimentos, conforme Figura 1, foram disponibilizados aos alunos. Havia jogos com três palitos que formavam um triângulo e jogos com três triângulos que não formavam um triângulo.

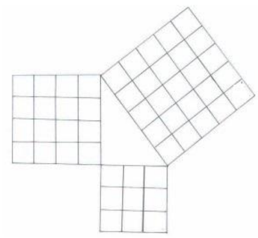
Figura 1 – Jogos de três palitos de madeira com diferentes comprimentos



Fonte: dados da pesquisa (2024).

A Tarefa 2 está apresentada no Quadros 2.

Quadro 2 – Tarefa 2: identificando a relação entre os lados de um triângulo retângulo

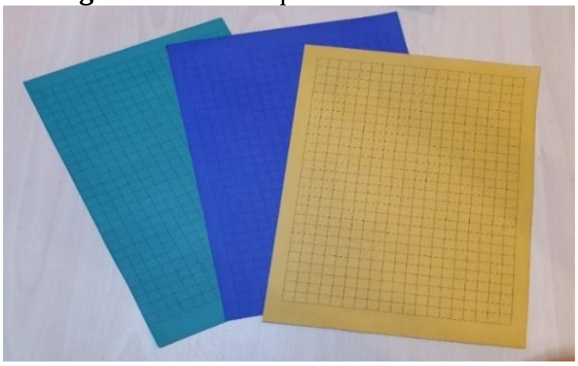
<table>
<tr><td colspan="2">1) Com base no triângulo retângulo que você montou com os palitos, complete o triângulo impresso na folha de sulfite e meça seus lados. Desenhe um quadrado em cada lado do triângulo que você completou.</td></tr>
<tr><td>2) Depois de desenhado os quadrados a partir dos lados do triângulo, recorte e cole quadradinhos da malha quadriculada colorida preenchendo as áreas dos quadrados.
</td><td>a) Calcule a área dos dois quadrados menores.
b) Some a área desses dois quadrados.
c) Calcule a área do quadrado maior.
d) O que conseguiu observar a partir das áreas dos quadrados que você calculou.</td></tr>
</table>

Fonte: dados da pesquisa (2024)

A Tarefa 2 tem como objetivo permitir que os alunos percebam, por eles próprios, que no triângulo retângulo a medida da hipotenusa ao quadrado é igual à soma das medidas de cada cateto ao quadrado. Para isso, malhas quadradas coloridas, conforme Figura 2, foram disponibilizadas aos alunos.

[10] Condição de existência de um triângulo: em qualquer triângulo, a medida de qualquer lado é sempre menor que a soma das medidas dos outros dois lados.

Figura 2 – Malha quadriculada colorida



Fonte: dados da pesquisa (2024).

Assim, a Tarefa 2 incentiva os alunos a explorarem as características dos triângulos retângulos por meio da construção e comparação de diferentes triângulos, bem como pelo cálculo das áreas dos quadrados associados. Isso os levam a descobrirem por si mesmos a relação fundamental entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, chamada de Teorema de Pitágoras.

Também foi elaborada uma Tarefa 3, mas essa, por questões de limite de páginas, não será discutida neste artigo. A Tarefa 3 não foi central para a pesquisa, pois foi uma tarefa de aprofundamento do que foi discutido nas Tarefas 1 e 2.

Durante o desenvolvimento das tarefas, os 22 alunos foram divididos em grupos de 4 a 5 integrantes (os mesmos grupos em todas as aulas). Sobre a mesa de cada grupo, foram deixados gravadores de áudio e um gravador permaneceu com a professora-pesquisadora enquanto caminhava pelos grupos ou discutia com a sala inteira.

Para o tratamento dos dados, foram considerados áudios de momentos em que a professora-pesquisadora conversava com a turma toda (durante o lançamento das tarefas, a realização, a discussão e a sistematização das aprendizagens) e áudios de um grupo (formado por quatro integrantes) durante a realização das tarefas ao longo dos três dias de aula. Optamos por focar a análise em apenas um grupo ao longo dos três dias, e o grupo selecionado para análise foi escolhido pela própria professora/pesquisadora que identificou, neste grupo, boas interações e possibilidades de mobilizações do pensamento geométrico.

Em alguns momentos das análises dos dados, trazem-se discussões realizadas no único grupo considerado, mas, por vezes, trazem-se falas de alunos de outros grupos durante a discussão coletiva envolvendo toda a turma. Isso foi necessário para dar uma sequência coerente aos diálogos apresentados nas análises dos dados.

Visando manter o anonimato dos participantes da pesquisa, foram utilizados nomes fictícios para os alunos que aparecem nos dados. O grupo analisado contava com a participação dos alunos: Ana, Caio, Carlos e Bruna. Para auxiliar nas análises, enumerou-se cada fala transcrita. As análises foram feitas buscando identificar mobilizações do pensamento geométrico desses alunos, segundo a teoria de van Hiele.

5 Análises

De acordo com o planejamento das aulas, a proposta era uma trabalhar uma tarefa em cada um dos três dias de aula, ou seja, 100 minutos para cada tarefa. A intenção era realizar as quatro fases do Ensino Exploratório em cada dia. No entanto, na prática, isso não ocorreu. Ao longo do primeiro dia de aula, a professora introduziu a Tarefa 1 (fase 1 do Ensino Exploratório) e os alunos realizaram a tarefa (fase 2 do Ensino Exploratório) nos pequenos grupos. A discussão (fase 3 do Ensino Exploratório) e a sistematização das aprendizagens (fase 4 do Ensino Exploratório) com relação à Tarefa 1 ficaram para o outro dia de aula. Ao longo do segundo dia de aula, a professora conseguiu finalizar a Tarefa 1, realizando as fases 3 e 4 do Ensino Exploratório, no que diz respeito à condição de existência de um triângulo. Com relação à Tarefa 2, nesse dia, a professora apenas introduziu a tarefa (fase 1 do Ensino Exploratório) e os alunos iniciaram sua realização nos pequenos grupos (fase 2 do Ensino Exploratório). Ao longo do terceiro e último dia de aula, a professora conseguiu finalizar a Tarefa 2, realizando as fases 3 e 4 do Ensino Exploratório, no que diz respeito ao Teorema de Pitágoras. Com relação à Tarefa 3, a professora introduziu a tarefa (fase 1 do Ensino Exploratório) e, de maneira apressada por conta do tempo, avançou para a discussão com toda a turma (fase 3 do Ensino Exploratório) e para a sistematização da aprendizagem dos alunos (fase 4 do Ensino Exploratório).

Para as análises dos dados, apresenta-se três episódios considerados relevantes e ilustrativos sobre o pensamento geométrico manifestado pelos alunos do grupo considerado. O primeiro episódio, chamado de "*O que é um triângulo?*", ocorreu no início do primeiro dia de aula e, portanto, refere-se à Tarefa 1. O segundo episódio, chamado de "*A gente já achou essa regra aí?*", ocorreu no final do primeiro dia de aula, também sobre a Tarefa 1. O terceiro episódio, chamado de "*Não sei como é que fala, mas acho que deu exato*", ocorreu no terceiro dia de aula e refere-se à Tarefa 2.

Episódio 1*: "O que é um triângulo?"*

Os enunciados da Tarefa 1 foram escritos um a um na lousa, lido e explicado pela professora-pesquisadora. As imagens foram entregues impressas, juntamente com os jogos de palitos recortados individualmente para cada aluno integrante do grupo.

A professora/pesquisadora introduz a tarefa dizendo:

> [1] *Professora*: O objetivo aqui da minha primeira tarefa é que vocês conheçam e reconheçam os triângulos! Como você explicaria para seu colega ao lado, o que é triângulo?

Logo em seguida, os alunos iniciam a etapa de realização da tarefa e começaram a dialogar entre os grupos. A professora volta sua atenção ao grupo analisado.

> [2] *Professora*: O que é um triângulo?
> [3] *Ana*: Triângulo é uma forma geométrica que tem três lados.
> [4] *Bruna*: Não é isso, triângulo é forma geométrica que tem...
> [5] *Caio*: 3 lados.
> [6] *Ana*: Uma forma geométrica com três pontos.
> [7] *Professora*: Hum?
> [8] *Ana*: Com uma base.
> [9] *Carlos*: Então, uma base reta. Como uma forma de pirâmide?

Os alunos começam a externalizar suas noções sobre o conceito de triângulos, apresentando inicialmente que eles possuem 3 lados (em [3]) e que se trata de uma forma geométrica (em [3] e [4]). Em [6], Ana diz que é uma forma geométrica que possui três pontos, possivelmente referindo-se aos vértices.

Em [9], Carlos está relacionando um triângulo a uma pirâmide, sem comentar a característica de cada figura geométrica, o que pode gerar erros conceituais. Os triângulos são figuras geométricas planas, enquanto as pirâmides são figuras geométricas espaciais. Por mais que algumas relações possam ser estabelecidas (por exemplo, as faces laterais das pirâmides são sempre triangulares), é preciso ter cautela com essa comparação entre as figuras.

Em [8] e [9], Ana e Carlos falam da base como se fosse uma característica que define um triângulo quando, na verdade, a base é um elemento que define as pirâmides. Qualquer um dos três lados de um triângulo pode ser tomado como base e sua altura relativa à base.

Em seguida, a professora pediu para os grupos conversarem entre si e registrarem uma conclusão sobre o que é um triângulo.

> [10] *Ana*: Para vocês escreverem, tipo, o que é um triângulo?
> [11] *Carlos*: O triângulo é uma forma geométrica.
> [12] *Ana*: Então, quantas bases?
> [13] *Carlos*: Uma base, 3 lados.
> [14] *Ana*: É, não tem muito o que falar sobre ele.
> [15] *Bruna*: Começa com uma base, aí tem as laterais.
> [16] *Ana*: Parecida com uma pirâmide.
> [17] *Carlos*: Tem uma base e três lados.
> [18] *Ana*: Coloquei lados.
> [19] *Bruna*: O triângulo é uma forma geométrica?

[20] *Ana*: Sim, uma base e 3 lados.
[21] *Carlos*: Faces é mais bonito. Um triângulo composto por uma base e 3 faces.

Alguns aspectos sobre a compreensão que os alunos têm acerca dos triângulos ficam mais evidentes no trecho acima. Em [12, 13, 15 e 17], os alunos consideram a ideia de base como algo que define um triângulo, como se existisse, previamente definido, um lado a ser chamado de base. Em [21], Carlos manifesta considerar a nomenclatura face mais bonita do que lado, sem se preocupar com o uso não convencional do termo face no caso de triângulos. Além disso, em [16], Ana menciona que um triângulo é parecido com uma pirâmide, o que nos leva a perceber que, na visão dela, pirâmide e triângulo não são exatamente as mesmas coisas.

Vale destacar que, neste momento, nenhum aluno do grupo mencionou a ideia de ângulo, apenas as noções de lado, vértice e base foram utilizadas pelos alunos para descreverem um triângulo.

Após essa primeira etapa, a professora partiu para o segundo item da Tarefa 1 com a seguinte apresentação:

[22] *Professora*: Vocês irão representar geometricamente um triângulo. [...] preciso que vocês utilizem a régua, meçam e anotem as medidas de cada lado!

O grupo iniciou a discussão:

[23] *Carlos*: De fazer com um...
[24] *Bruna*: Com uma base. [...]
[25] *Ana*: Faz 2,5 de altura, ... não, faz 2,5 na base e 3 de altura. É, 2,5 de base e 3 altura, fica bom.
[26] *Carlos*: Fica bom?
[27] *Ana*: Aham.
[28] *Carlos*: É 2,5 por 3, agora tem que fazer 2,5 por 3 de altura.
[29] *Ana*: É.

No excerto acima, é possível perceber que a ideia de base do triângulo continua sendo central para os alunos. Para construir um triângulo, os alunos consideraram importante atribuir um valor à medida da base e da altura (por exemplo, em [25 e 28]). A partir dos dados da pesquisa, não é possível garantir o que esse grupo de alunos, em especial Ana, está querendo dizer com “altura”. É possível considerar que estejam pensando na ideia correta de altura relativa a uma base, isto é, na altura como sendo um segmento de reta perpendicular à base adotada, com extremidades nesta base e no vértice oposto a ela. Independentemente disso, fato é que os alunos do grupo analisado estão utilizando as ideias de base e de altura de maneira inapropriada para descreverem o que é um triângulo. O uso incorreto dos termos os impede de elaborarem, por si mesmos, a condição de existência de um triângulo esperada para a Tarefa 1, como está apresentado no próximo episódio.

Episódio 2*: "A gente já achou essa regra aí?"*

Após os alunos discutirem livremente sobre o que é um triângulo (episódio anterior), a professora entrega a eles jogos com palitinhos para tentarem formar triângulos.

> [30] *Professora*: Com três segmentos de reta, é sempre possível formar um triângulo? [...] Eu vou entregar [palitinhos] para cada grupo, vocês vão abrir e tentar formar o triângulo.
>
> O grupo começa a discutir.
>
> [31] *Ana*: Ah, acho que entendi. Se a gente consegue fazer um triângulo com o tamanho das peças que a gente pegou. É, acho que é isso mesmo. [...] Só se cortar um pedaço aqui, aí dá um triângulo sim.
> [32] *Carlos*: Cortar essa pontinha.
> [33] *Alunos do grupo*: Verdade.

Utilizando um jogo de palitinhos que não forma um triângulo, os alunos percebem que seria necessário cortar um pedaço de um dos palitos para conseguir formar o triângulo (em [32] e em [33]). Ou seja, os alunos percebem que nem sempre três segmentos formam um triângulo.

Em outro momento, a professora retorna ao grupo e, após ouvir os alunos, sugere o uso de outro conjunto de palitinhos.

> [34] *Ana*: Aqui deu um triângulo. Aqui não deu um triângulo [...] Não dá, esse daqui é pequeno. Se esses dois fossem do mesmo tamanho...
> [35] *Carlos*: Não daria.
> [36] *Ana*: É verdade [risos]. Porque a base é muito grande.
> [37] *Carlos*: Só se esse fosse [indicando um palitinho] maior ou igual a esse [indicando outro palitinho], mesmo tamanho ou um pouquinho maior. Esse daqui oh [indicando um palitinho].
> [38] *Ana*: Isso aqui não é um triângulo.
> [39] *Caio*: É sim.
> [40] *Carlos*: É, mas não é o que a dona quer.
> [41] *Ana*: É um triângulo?
> [42] *Carlos*: Sim. Tem vários triângulos. Tem o normal, que é o que estamos fazendo aqui agora, e tem esse.
> [43] *Ana*: Entendi. Gostei. Então isso daqui também é um triângulo, olha. [...] Um triângulo "desformado", mas deu certo. Para ter um triângulo perfeito, as bases têm que ser iguais à altura, e aquele ou a base era muito maior ou muito menor, é isso.

No trecho acima, Ana, em [34], percebe que com um jogo de palitinhos consegue formar um triângulo, mas que, com outro, não. Ana sugere que se os palitinhos "*fossem do mesmo tamanho*", formariam um triângulo. Carlos intervém dizendo, em [85], que mesmo se fossem de mesmo tamanho, não daria. Carlos ainda sugere um possível jogo de palitinhos que formaria um triângulo. Ana, em [36], volta a falar da base.

As falas de Ana em [38], [41] e [43] são reveladoras quanto à sua compreensão do que é um triângulo. Até então, Ana não estava considerando que um triângulo poderia ter seus lados todos diferentes. Quando confrontada por Carlos, Ana passa a assumir essa possibilidade (*Entendi. Gostei*), mas com algum estranhamento (*Um triângulo "desformado", mas deu certo*).

Mais ao final da aula, a professora tenta estimular os alunos a pensarem e falarem sobre a possibilidade de formar um triângulo com três segmentos de reta de qualquer medida, visando a elaboração, por parte dos alunos, da condição de existência de um triângulo.

> [44] *Professora*: Então, com 3 segmentos de reta de qualquer tamanho, sempre é possível construir um triângulo?
> [45] *Todos*: Não, não.
> [46] *Professora*: Não! Diante da construção que deu certo e as outras que não deram, seria possível existir alguma regra? Uma condição ou uma regrinha para que possamos construir um triângulo?
> [47] *Ana*: A gente já achou essa regra aí?
> [48] *Carlos*: Não.

Ana, a aluna mais ativa do grupo, tenta apresentar uma explicação ou, nas palavras da professora, uma regrinha.

> [49] *Ana*: Vou te explicar. O nome desse aqui é segmento, né? E os 3 segmentos são iguais, por isso deu um triângulo perfeito, né? Então, a regra é clara, para dar um triângulo perfeito 2 segmentos têm que ser iguais, a base não importa o tamanho dela, sendo os 2 segmentos iguais terá um triângulo perfeito, entendeu agora?

Apesar de, em [43], Ana indicar que entendeu a possibilidade de ter outros triângulos, diferente daqueles que estava considerando inicialmente, em [49] a aluna volta a insistir na ideia de que "*para dar um triângulo perfeito, 2 segmentos têm que ser iguais*". Cabe destacar que ter dois segmentos iguais não é condição necessária para se construir um triângulo.

O horário de término da aula estava chegando e ainda havia outras partes da Tarefa 1 a serem exploradas. A professora acelera as discussões e pergunta aos alunos de toda a sala se chegaram a uma conclusão sobre a "regrinha" para fazer essa construção. Apesar de Ana e seu grupo perceberem que ter três segmentos não é condição suficiente para formar um triângulo, os diálogos evidenciam que eles não chegaram a uma compreensão adequada sobre a condição de existência do triângulo. O grupo apresentou uma regra [49], mas inadequada.

Ao fim da aula no primeiro dia, com pressa, a professora pediu para que os alunos desenhassem o que, para eles, seria um triângulo retângulo. Por conta do tempo, não foi possível fazer a sistematização das aprendizagens dos alunos ao final da aula, ficando essa parte para o segundo dia de aula. Por limites de espaço, não discutiremos a sistematização das aprendizagens dos alunos neste artigo. Cabe mencionar que, no início do segundo dia de aula, a professora retomou a discussão e com o auxílio de alunos de outros grupos, não o aqui analisado, a professora construiu o enunciado da condição de existência do triângulo, conforme diálogo abaixo.

> [50] *Professora*: O que nós podemos concluir?
> [51] *Um aluno de outro grupo*: Que qualquer soma que tiver, vai ser maior do que o lado que sobrou.
> [52] *Professora*: Como é que é, então?
> [53] *Um aluno de outro grupo*: A soma de dois sempre vai ser maior do que o que sobrou.
> [54] *Professora*: Então essa é uma condição de existência para um triângulo. A soma das medidas de dois lados. Eu pego dois lados qualquer do meu triângulo, de um triângulo qualquer. As medidas dos dois lados, somando, tem que ser?
> [55] *Todos da sala*: Maior, maior do que o que sobrou.
> [56] *Aluno*: A soma de dois lados sempre vai ser maior do que o que sobrou.

Episódio 3*: "Não sei como é que fala, mas acho que deu exato"*

No terceiro e último dia de aula destinado à pesquisa, a professora retoma a Tarefa 2 que já havia sido iniciada na aula anterior.

> [57] *Professora*: Bom dia, galerinha, nosso último dia! Vamos dar continuidade à nossa tarefa de ontem. [...] vocês receberam uma impressão que tinha alguns triângulos que vocês deveriam completar e fazer o que mais? Medir os lados!

Nesse momento da Tarefa 2, os alunos fizeram várias tentativas montando triângulos retângulos e calculando a área dos quadrados cujos lados têm a mesma medida dos lados do triângulo. O grupo analisado, principalmente Ana e Carlos, respondem aos questionamentos da professora, indicando que compreenderam o que era para ser feito e que, inclusive, já tinham calculado as áreas dos quadrados e somado para o caso de três triângulos diferentes.

A professora, então, prossegue conversando com a turma toda, mas o momento ainda era da discussão nos pequenos grupos.

> [58] *Professora*: Vocês fizeram a representação geométrica através do quê?
> [59] *Aluno de outro grupo*: Da malha quadriculada.
> [60] *Professora*: Da malha quadriculada, muito bem. [...]Agora eu gostaria que vocês explicassem no grupo, um para o outro: Qual é essa semelhança ou qual é essa diferença que vocês viram?

Após confirmar com os alunos o que eles já haviam feito (em [58]), a professora começa a questioná-los [60] em busca do reconhecimento de alguma característica comum que os alunos pudessem abstrair dos triângulos já conhecidos por eles. A professora fala em "semelhança", mas esse termo não é adequado para o momento, uma vez que não se está discutindo semelhanças de triângulos. A professora buscava compreender se os alunos perceberam que, no caso do triângulo retângulo, era possível estabelecer alguma relação entre as áreas dos quadrados relativos aos lados do triângulo, mas que em outros triângulos essa relação não poderia ser estabelecida.

No trecho abaixo, os alunos estão debatendo quando a professora se aproxima e faz questionamentos.

[61] *Ana*: Você viu diferença ou semelhança?
[62] *Carlos*: Tamanho.
[63] *Ana*: É, tamanho. Você viu diferença, Caio?
[64] *Caio*: Acho que não. No tamanho.
[65] *Professora*: E aqui [no grupo], o que vocês viram de semelhança? Ou tem alguma diferença?
[66] *Carlos*: A diferença é no tamanho, no tamanho, nas medidas.
[67] *Ana*: É que esses 2 triângulos retângulos deram, como diz? Exatos.
[68] *Carlos*: É, deu exato.
[69] *Ana*: Tipo, a gente soma aqui, 16 mais 9 deu 25. E aqui 64 mais 36 deu 100. [...] Não sei como é que fala, mas acho que deu exato.

Inicialmente, os alunos do grupo parecem focar no tamanho [62], [63], [64] e [66] dos triângulos, mas, em seguida, em [67], [68] e [69], os alunos parecem, por meio da observação e da experimentação que fizeram, avançar na percepção de que os triângulos possuem uma característica em comum. Em [69], Ana menciona que, no caso do triângulo de lados com medidas três, quatro e cinco unidades, a soma das áreas dos quadrados de lado quatro unidades e três unidades é igual à área do quadrado de lado cinco unidades. O mesmo aconteceu com o triângulo de lado seis, oito e dez. Em [67] e [68], os alunos Ana e Carlos utilizam o termo "exato" para dizer que a soma das áreas de dois quadrados era igual à área do terceiro quadrado.

Em um momento posterior, a professora solicita que verifiquem se a mesma característica pode ser observada para novos triângulos. Primeiro, um triângulo equilátero cujos lados medem 7 unidades de comprimento. Depois, um triângulo escaleno cujos lados medem 5, 7 e 8 unidades de comprimento. Os alunos do grupo percebem que esses dois novos triângulos não possuem a mesma característica dos triângulos discutidos anteriormente.

A professora inicia, então, a discussão (fase 3 do Ensino Exploratório) da Tarefa 2 com toda a turma e caminha para a sistematização da aprendizagem dos alunos (fase 4 do Ensino Exploratório).

[70] *Professora*: Encerrando essa tarefa, organizando as falas de vocês, sobre o que cada grupo falou um pouquinho. Como podemos expressar verbalmente a relação entre as medidas das áreas desses quadrados? Como podemos falar sobre a comparação? Somaram as duas áreas desses quadrados e fizeram uma comparação com a área desse quadrado maior. O que nós descobrimos?
[71] *Ana*: Que a soma das áreas dos quadrados menores é igual à área do quadrado maior. [...]
[72] *Professora*: Então, será que existe um padrão ou uma regrinha para a área do quadrado, partindo dos lados de um triângulo, será que consigo estabelecer uma regrinha?
[73] *Ana*: Eu acho que todo triângulo... tem que ter ângulo de 90º.
[74] *Carlos*: Triângulo retângulo, no caso daí.
[75] *Ana*: Para as duas áreas menores caberem dentro da área maior.
[76] *Professora*: E isso só é possível?
[77] *Carlos*: No triângulo retângulo.

[78] *Ana*: Com ângulo de 90º.
[79] *Professora*: Ou seja, no triângulo?
[80] *Todos*: Retângulo.

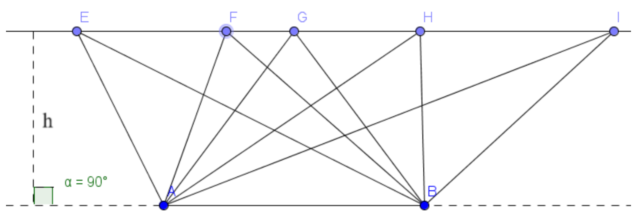
Apesar de ainda não terem enunciado o Teorema de Pitágoras nos termos corretos (isto é, que, no triângulo retângulo, a medida da hipotenusa ao quadrado é igual à soma das medidas de cada cateto ao quadrado), o grupo conseguiu perceber a relação matemática existente as áreas dos quadrados relativos aos lados do triângulo retângulo. Em [71], Ana enuncia essa relação e, em [73], [74], [77], [78] e [79], o grupo manifesta que essa relação é válida no caso de triângulos retângulos.

6 Discussão

Os Episódios 1, 2 e 3 são pequenos recortes de um ambiente complexo de sala de aula ao longo de três dias de aula. Mesmo assim, é possível tecer algumas discussões a respeito dos pensamentos geométricos manifestados pelos alunos do grupo considerado durante as aulas pautadas no Ensino Exploratório.

No Episódio 1, foi possível notar que os alunos compreendem algumas características dos triângulos, como o fato de serem uma figura geométrica e de possuírem três lados e três vértices. No entanto, os alunos apresentam concepções equivocadas sobre a ideia de base e de altura de um triângulo. Essas noções (base e altura) são importantes para explorarem características de um triângulo, mas não definem a sua existência (só faz sentido falar de base e de altura de um triângulo se ele já existir). Ao construir um triângulo partindo das ideias de base e de altura em relação a essa base, os alunos não percebem que diferentes triângulos podem ser formados, conforme Figura 3.

Figura 3 – Diferentes triângulos com a mesma base e a mesma altura



Fonte: elaborados pelos autores (2024).

Na Figura 3, vê-se que diferentes triângulos podem ser construídos a partir de uma mesma base $\overline{AB}$ e uma altura h. Todos esses triângulos têm a mesma área, mas podem ser distintos, isto é, podem ter as medidas dos lados e dos ângulos internos diferentes. Se os alunos utilizassem as medidas dos lados (ao invés da base e da altura) para construir seus triângulos, duas ideias matemáticas poderiam emergir: a de rigidez dos triângulos e a de triângulos congruentes. A rigidez dos triângulos significa que (diferentemente dos quadriláteros, por exemplo) não é possível alterar seus ângulos internos mantendo as medidas dos seus lados fixas. A congruência de triângulos significa que dois triângulos são congruentes quando as medidas dos lados e dos ângulos de um deles são, respectivamente, iguais às medidas dos lados e dos ângulos do outro.

A maneira como os alunos lidaram com a pergunta “o que é um triângulo?”, remeteu ao nível 0 *visualização* ou *reconhecimento* do pensamento geométrico, uma vez que “raciocinam basicamente por meio de considerações visuais. [...] figuras geométricas são reconhecidas pela aparência global, podendo ser chamadas de triângulo, quadrado, etc., mas os alunos não explicitam as propriedades de identificação das mesmas” (Kaleff, 1994, p. 4).

No Episódio 2, fica evidente que por estarem restritos às ideias de base e de altura e a aspectos relacionados à visualização (triângulo “desformado” e triângulo perfeito), os alunos não conseguiram avançar para uma abstração da condição de existência do triângulo. No entanto, é possível perceber que a Tarefa 1, por meio do recurso de um material manipulável (os palitinhos), permitiu aos alunos realizarem uma análise informal através de observação e experimentação (Kaleff, 1994) que os levou a perceberem que não é suficiente ter três segmentos para formar um triângulo. Por isso, pode-se dizer que, nesse caso, os alunos manifestaram o nível 1 *análise* do pensamento geométrico.

Os alunos do grupo analisado não enunciaram, de maneira autônoma, a condição de existência do triângulo, ficando a cargo da professora promover essa formalização, após manifestação de alunos de outros grupos. Nesse caso, considera-se que a abordagem do Ensino Exploratório – durante as fases 3 e 4 (discussão e sistematização das aprendizagens matemáticas) – pode ter oportunizado aos alunos do grupo um repensar sobre suas conclusões a respeito da condição de existência do triângulo.

No Episódio 3, os alunos do grupo compreendem, de forma autônoma, a relação entre o quadrado da medida de cada lado do triângulo retângulo. Os alunos chegaram à conclusão por meio do trabalho com a malha quadriculada. Coube à professora enunciar o Teorema de Pitágoras em termos dos catetos e da hipotenusa, mas o alicerce para a compreensão do teorema já estava construído pelos alunos. Nesse caso, entende-se que os alunos manifestaram o nível 2 *deduções informal* ou *ordenação*, pois chegaram a estabelecer interrelações de propriedades em figuras, como quando perceberam que apenas no caso do triângulo retângulo, a medida de um lado ao quadrado é igual à soma das medidas dos outros dois ao quadrado.

Em síntese, a partir dos três episódios analisados, é possível dizer que os alunos podem tratar de uma maneira inicial (nível 0) ao lidarem conceitualmente com a noção de triângulo – acreditando que a base de um triângulo é algo que define sua existência e focando no formato do triângulo ("desformado" ou "perfeito") – e, com o auxílio de materiais manipuláveis[11] (palitinhos e malha quadriculada para recortar e colar quadradinhos), avançarem para um pensamento abstrato (nível 2) a lidarem com características relacionadas a determinados tipos de triângulos, como o Teorema de Pitágoras para triângulos retângulos.

É preciso, também, tecer reflexões sobre o Ensino Exploratório e seus desafios, pois isso tem impacto direto no pensamento geométrico manifestado pelos alunos analisados. Canavarro (2011) apresenta alguns desses desafios e alguns deles foram notados nesta pesquisa.

Um desafio do Ensino Exploratório que merece destaque diz respeito à gestão do tempo (Canavarro, 2011). As seis aulas ocorreram ao longo de três dias, sendo duas aulas por dia. O planejamento inicial era abordar uma tarefa matemática em cada dia, promovendo as quatro fases do Ensino Exploratório em um único dia (duas aulas). No entanto, a realidade da sala de aula foi outra e o tempo planejado não funcionou. A Tarefa 1 começou no primeiro dia e finalizou no segundo dia de aula. A Tarefa 2 começou no segundo dia e finalizou no terceiro dia de aula. A Tarefa 3 precisou ser reduzida para ser possível iniciar e finalizar no terceiro dia de aula, juntamente com a Tarefa 2.

De acordo com Canavarro (2011), para cada tarefa, deve-se evitar adiar para a aula seguinte a discussão ou a síntese dos conhecimentos produzidos pelos alunos. Tal fato, segundo a autora, pode gerar a perda de envolvimento dos alunos e o seu distanciamento das produções matemáticas realizadas. A perda de envolvimento dos alunos não foi percebida nesta pesquisa, mas adiar a discussão e a sistematização das aprendizagens para outro dia e a pressa para finalizar a Tarefa 1 interromperam uma sequência de discussões matemáticas produtivas e comprometeu a retomada, por parte da professora, das conclusões do grupo analisado sobre a condição de existência do triângulo. Como pode ser visto ao final do Episódio 2, foram alunos de outro grupo que enunciaram essa condição de existência.

Outro desafio diz respeito a promover um ambiente estimulante em que os alunos sejam encorajados a participar ativamente e a querer saber o pensamento dos outros, a ouvir, a falar, a explicar, a questionar e a contribuir para um saber comum com validade matemática

---

[11] Materiais manipuláveis são entendidos como "aqueles em que o estudante é capaz de sentir, tocar, manusear e mover. Podem ser objetos reais que têm aplicações sociais nas nossas atividades cotidianas, ou podem ser objetos usados para representar uma ideia ou uma característica de um número ou do sistema numérico. Objetos como copo medidor, régua, balança, termômetro e garrafas de diferentes tamanhos são usados em nossas atividades diárias" (Grossnickle; Junge; Metzner, 1951, p. 162, tradução nossa).

(Canavarro, 2011). Por vezes esse ambiente estimulante foi percebido em sala de aula. No entanto, é possível notar a liderança de Ana ao longo das discussões. Fica evidente, principalmente pelo fato de suas opiniões prevalecerem no grupo, que suas ideias matemáticas, nem sempre adequadas e pouco rebatidas pelos outros membros, conduziram o grupo a conclusões limitadas sobre a condição de existência de um triângulo. A discussão ficou centrada nas ideias de triângulos “desformados” ou perfeitos. Esse desafio se coloca à professora, que precisa lidar com todos os grupos enquanto circula pela sala, fomentando uma discussão produtiva entre os alunos e, também, controlando o tempo da aula.

7 Considerações finais

Esta pesquisa não é inovadora, uma vez que há, como já mencionado, outras pesquisas que discutem o pensamento geométrico de alunos, inclusive envolvendo o Teorema de Pitágoras. Entretanto, considera-se que os resultados apresentados aqui se configuram como complementares a esses estudos já publicados sobre essa temática. A abordagem do Ensino Exploratório, apesar de desafiadora, mostra-se como potencial para se criar um ambiente de aprendizagem em sala de aula que favoreça o desenvolvimento do pensamento geométrico. Como ficou evidenciado nos Episódios 2 e 3, o uso de tarefas matemáticas cuidadosamente elaboradas, que fazem uso de materiais manipuláveis (palitinhos e malha quadriculada para recortar e colar quadradinhos), aliado a um ambiente em que os alunos são incentivados a explorar, investigar e discutir conceitos matemáticos de forma ativa e autônoma (Canavarro, 2011), podem permitir que os alunos partam de níveis de pensamento geométricos mais iniciais e avancem para níveis mais elevados.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios. **Educação e Matemática**. Lisboa, n.115, p.11-17, 2011. Disponível em: https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/4265/1/APCanavarro%202011%20EM115%20pp11-17%20Ensino%20Explorat%C3%B3rio.pdf. Acesso em 24 de outubro de 2024.

CARGNIN, R. M.; GUERRA, S. H.; LEIVAS, J. C. P. Teoria de van Hiele e investigação matemática: implicações para o ensino de Geometria. **Revista Práxis**, Volta redonda, Ano VIII, n. 15, 2016. Disponível em: https://revistas.unifoa.edu.br/praxis/article/view/660. Acesso em 24 de outubro de 2024.

GROSSNICKLE, F. E.; JUNGE, C.; METZNER, W. Instructional Materials for Teaching Arithmetic. In: **The Teaching of Arithmetic Fiftieth Yearbook of the National Society for the Study of Education**, pt. 2. Chicago: University of Chicago Press, 1951. p. 155-185.

KALEFF, A. M. et al. Desenvolvimento do Pensamento Geométrico – O Modelo de Van Hiele. **Bolema**, Rio Claro – SP, v. 9, n. 10, 1994. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10671/7055. Acesso em 24 de outubro de 2024.

LEIVAS, J. C. P. Pitágoras e Van Hiele: uma possibilidade de conexão. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 18, n. 3, p. 643-655, 2012. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ciedu/a/PvgqnD73Vqs96S3SVCKKsPn/abstract/?lang=pt&format=html. Acesso em 24 de outubro de 2024.

LEIVAS, J. C. P. Investigando o último nível da teoria de van Hiele com alunos de pósgraduação: a generalização do teorema de Pitágoras. **Vidya**, v. 37, n. 2, p. 515-531, 2017. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/1945. Acesso em 24 de outubro de 2024.

MANSILLA, L. E. O. **Representaciones semioticas en el aprendizaje del Teorema De Pitágoras**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) Universidad Autónoma De Manizales, Manizales, Colombia, p. 96. 2011.

NASCIMENTO, C. B. **Demonstrações do Teorema de Pitágoras**. 2025. 77 páginas. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Alagoas, Arapiraca, 2025.

OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.; CANAVARRO, A. P. Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. **Quadrante**, Vol. XXII, Nº 2, 2013. Disponível em: https://repositorio.ipv.pt/bitstream/10400.19/1957/1/_Quadrante_XXII_2_2013_pp029-054_52a5bafb92acd.pdf. Acesso em 24 de outubro de 2024.

ROQUE, T. **História da matemática**: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Editora Zahar, 2012.

TOGINHO, E. U. **Ensino Exploratório e o Teorema de Pitágoras**: uma análise das manifestações do Pensamento Geométrico. 2024. 149 páginas. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2024.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.