revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Teorema de Pitágoras: história e demonstrações para sala de aula

DOI: https://doi.org/rpem.2026.15.36.10677

Fernando Emmi Correa[1]
Miguel Chaquiam[2]

Resumo: A partir dos dados do Saeb e ENEM é possível deduzir que a baixa proficiência para habilidades geométricas específicas não foi superada ao longo do Ensino Médio e refletida no ENEM, evidenciada nos microdados de 2017 a 2022. De outro lado, pesquisa com um grupo de alunos egressos do Ensino Fundamental a respeito das relações métricas no triângulo retângulo, apenas 30% reconheceu o enunciado do Teorema de Pitágoras. A análise de livros didáticos de Matemática nos revelou que as demonstrações desse teorema são semelhantes, baseadas na manipulação algébrica a partir das relações métricas no triângulo retângulo ou decomposição de um quadrado específico. A solução não parece ser única, de modo que o recorte da pesquisa foca apenas nas contribuições que o conhecimento de variadas formas de demonstrar o teorema de Pitágoras pode trazer para o aumento das habilidades geométricas dos alunos. Nesse sentido, foi realizada pesquisa que pode ser classificada quanto a sua abordagem, como qualitativa e quanto aos seus procedimentos, como bibliográfica, focada na identificação de demonstrações do citado teorema e suas possíveis utilizações no ensino. Para essa exposição foi elencado como objetivo, apresentar demonstrações do teorema de Pitágoras, cujo nível de dificuldade é compatível com o esperado de um aluno concluinte do Ensino Fundamental. Por fim, as demonstrações apresentadas podem corroborar nos processos de ensino e de aprendizagem do teorema de Pitágoras, bem como à formação inicial ou continuada de professores de Matemática, visto que pode ser um diferencial em relação ao apresentado nos livros didáticos de Matemática.
Palavras chaves: Ensino de Matemática. Geometria Plana. Teorema de Pitágoras. Demonstrações do Teorema de Pitágoras.

Pythagorean Theorem: history and proofs for the classroom

Abstract: Based on data from Saeb and ENEM, it is possible to deduce that the low proficiency in specific geometric skills was not overcome throughout high school and is reflected in the ENEM, as evidenced in the microdata from 2017 to 2022. On the other hand, research with a group of students who had completed elementary school regarding metric relationships in right triangles showed that only 30% recognized the statement of the Pythagorean Theorem. Analysis of mathematics textbooks revealed that the proofs of this theorem are similar, based on algebraic manipulation of metric relationships in right triangles or the decomposition of a specific square. The solution does not appear to be unique, so the scope of this research focuses only on the contributions that knowledge of various ways of proving the Pythagorean theorem can bring to increasing students' geometric skills. In this sense, research was conducted that can be classified, in terms of its approach, as qualitative and, in terms of its procedures, as bibliographic, focused on identifying proofs of the aforementioned theorem and their possible uses in teaching. The objective of this presentation was to demonstrate the Pythagorean theorem at a level of difficulty appropriate for a student completing elementary school. Ultimately, the demonstrations presented can contribute to the teaching and learning processes of the Pythagorean theorem, as well as

[1] Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. (UEPA). Professor no Instituto Federal do Pará (IFPA), E-mail: fernando.emmi@gmail.com - ORCID https://orcid.org/0009-0008-2560-1335.
[2] Doutor em Educação pelo PPGEd da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professor da Universidade do Estado do Pará (UEPA). E-mail: miguel.chaquiam@uepa.br - ORCID https://orcid.org/0000-0003-1308-8710.

to the initial or continuing training of mathematics teachers, since they can offer a differentiating factor compared to what is presented in mathematics textbooks.
Keywords: Mathematics Teaching. Plane Geometry. Pythagorean Theorem. Proofs of the Pythagorean Theorem.

1 Introdução

No Brasil, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática, o ensino da geometria "desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive" (Brasil, 1998, p. 122). Além disso, "as atividades de geometria são muito propícias para que o professor construa junto com seus alunos um caminho que a partir de experiências concretas leve-os a compreender a importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas" (Brasil, 1998, p. 126).

Nesse sentido, estudos nessa área do conhecimento matemático que ajudem os alunos a adquirirem competências e habilidades para resolver problemas, especialmente na área do espaço e das formas, bem como de estabelecer conexões entre os objetos matemáticos, tem potencial para contribuir com a melhoria do processo de aprendizagem.

Para as séries finais do Ensino Fundamental a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) orienta que os estudos de geometria não podem ficar reduzidos "a mera aplicação de fórmulas [...] nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade [...] ou do teorema de Pitágoras" (Brasil, 2018, p. 272), mas devem consolidar e ampliar as aprendizagens já realizadas. Esse mesmo documento prevê como habilidade EF09MA13 a necessidade de o aluno aprender a "demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras (...)" (Brasil, 2018, p. 319).

Em que pese sua importância, uma rápida comparação entre os resultados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) de 2021 com os de 2019, revelam uma piora no desempenho dos estudantes brasileiros, com uma concentração nos níveis mais baixos de proficiência em Matemática. Um recorte desse estudo comparativo entre os resultados de Matemática dos estudantes paraenses no 9º ano do Ensino Fundamental e a média nacional estão presentes no Quadro 1.

Nesse retrato, 62,6% dos estudantes brasileiros e 79,5% dos estudantes paraenses do 9º ano do Ensino Fundamental tiveram classificação nos níveis 0, 1, 2 ou 3 da escala de proficiência em Matemática, com pontuação média de 256,0 e 236,5 pontos, respectivamente.

Considerando a metodologia adotada pelo Saeb na organização da escala de referência, podemos inferir que estes estudantes não adquiriram as habilidades para resolver problemas utilizando o Teorema de Pitágoras (níveis 6 e 7) ou mesmo para reconhecer que um ângulo não se altera quando ampliamos ou reduzimos figuras (nível 5).

Quadro 1: Resultados de Matemática - 9º Ano do Ensino Fundamental – Brasil e Pará

UF	Total de Estudantes nos Níveis 0, 1, 2 ou 3 Escala de Proficiência (em %)	Proficiência Média dos Estudantes (em pontos)
Brasil	62,6	256,0
Pará	79,5	236,5

Fonte: Adaptado do Saeb, 2021.

Essa baixa aprendizagem geométrica também é percebida quando analisamos os microdados do ENEM de 2017 a 2022. O Quadro 2 traz um recorte com o percentual de aproveitamento dos alunos das escolas da rede estadual do Pará, no município de Belém, nas questões que buscavam avaliar a seguinte competência: utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Quadro 2: Aproveitamento dos alunos - ENEM de 2017 a 2022 - Município de Belém (PA)

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.							
Ano	**2017**	**2018**	**2019**	**2020**	**2021**	**2022**	**Média**
Aproveitamento (em %)	27,6	29,3	21,2	31,8	20,1	25,5	25,9

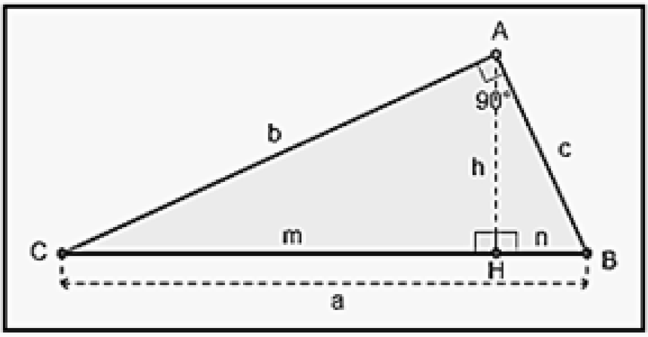
Fonte: Adaptado do site https://www.zbs.com.br/enem-anteriores, 2024.

É possível deduzir a partir dos dados apresentados que a baixa proficiência apontada pela escala de referência do Saeb para habilidades geométricas específicas pode não ter sido superada ao longo do Ensino Médio e refletida ao final no ENEM. De outro lado, pesquisa desenvolvida no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (PPGEM-UEPA) constatou resultados similares em um grupo de alunos egressos do Ensino Fundamental a respeito das dificuldades em relação à aprendizagem das relações métricas no triângulo retângulo.

A exemplo, na questão 6 do teste de verificação aplicado (Figura 1) da citada pesquisa, foi apresentado o triângulo retângulo BAC e solicitado ao aluno que identificasse em qual das alternativas figurava o enunciado do teorema de Pitágoras. Após análise, identificou-se que apenas 22 dos 72 alunos participantes assinalaram a alternativa correta B.

Figura 1: Questão 6 do teste de verificação

6. No triângulo retângulo ABC abaixo estão destacados os seguintes elementos: hipotenusa, catetos, altura e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.



Em qual das alternativas aparece o enunciado do Teorema de Pitágoras?

A) a medida da hipotenusa do triângulo retângulo é igual a soma das medidas das projeções de cada cateto sobre esta hipotenusa.

B) o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

C) o quadrado da medida de um cateto é igual ao produto da hipotenusa pela medida da projeção desse cateto.

D) o produto da medida da hipotenusa pela medida da altura é igual ao produto das medidas dos catetos.

E) o quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções de cada cateto sobre esta hipotenusa.

Fonte: Protocolo de pesquisa (2024, p. 3).

Ao olharmos somente os 37 alunos que afirmaram se lembrar de ter estudado o teorema de Pitágoras, constatou-se que apenas 16 deles assinalaram a alternativa correta. Embora o segundo cenário seja levemente melhor que o primeiro, ambos ainda são bastante preocupantes, uma vez que, a análise dos resultados revelou que os participantes não conseguiram identificar o teorema de Pitágoras diante das diferentes alternativas apresentadas.

A solução para esse tipo de problema que envolve a aprendizagem do teorema de Pitágoras não parece ser única, de modo que o recorte da pesquisa foca apenas nas contribuições que o conhecimento de variadas formas de demonstrar o teorema de Pitágoras pode trazer para o aumento das habilidades geométricas dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Os resultados apresentados neste trabalho são oriundos de uma pesquisa de mestrado em ensino e aprendizagem das Relações Métricas no Triângulo Retângulo, vinculado ao PPGEM-UEPA, curso de mestrado profissional em Ensino de Matemática.

Para a exposição desse recorte foi estabelecido como objetivo apresentar demonstrações do teorema de Pitágoras, cujo nível de dificuldade envolvido fosse compatível com o esperado de um aluno que está concluindo o Ensino Fundamental, ou seja, demonstrações que requerem apenas manipulações algébricas e aplicação de conhecimentos de geometria vinculados aos anos anteriores ao 9º ano.

Nesse sentido, a partir de Gil (2002) e Creswell (2007) a pesquisa ora proposta pode ser classificada quanto a sua natureza, como aplicada, visto a geração de conhecimento para aplicação prática, dirigida à solução de problemas específicos e, quanto a sua abordagem, como qualitativa, uma vez que se busca um entendimento mais acentuado sobre um assunto que não podem ser mensurados apenas com números ou dados obtidos por meio de questionário.

Ademais, essa pesquisa pode ser classificada quanto aos seus objetivos, como exploratória, uma vez que iremos explorar panoramas sob diversos prismas com a finalidade de se familiarizar sobre uma situação atual e, quanto aos seus procedimentos, como bibliográfica, visto que está sendo realizada revisão bibliográfica de materiais publicados em meios físicos ou eletrônicos.

Em relação as demonstrações identificadas do teorema de Pitágoras, foram selecionadas aquelas que envolvem manipulações algébricas de menor complexidade, aplicação de elementos de geometria plana que contemplam conteúdos relacionados aos triângulos e quadrado, comumente abordado nos quatro primeiros anos do Ensino Fundamental, bem como construções geométricas possíveis de serem realizadas por alunos desse nível de ensino.

Iniciamos caracterizando o personagem principal e a escola fundada por este, seguindo com as demonstrações do teorema que leva seu nome. Dentre as demonstrações identificadas na pesquisa, foram selecionadas cinco demonstrações que entendemos que sejam as que mais podem contribuir para o entendimento da relação métrica estabelecida no teorema de Pitágoras, tanto do ponto de vista do ensino quanto da aprendizagem por parte dos alunos, visto os elementos algébricos e geométricos envolvidos, descritos acima. Além disso, essas demonstrações trazem a oportunidade do professor revisitar assuntos trabalhados nos anos anteriores, representando uma excelente oportunidade de revisão e/ou de aprofundamento. Por fim, apresentamos sugestões para uso dessas demonstrações em sala de aula.

2 Pitágoras: um homem, uma escola e um teorema

Em certo momento da história da matemática, o homem começou a questionar o "*porquê?*" das coisas e questões fundamentais começaram a ser formuladas. Processos empíricos orientais que ajudavam a responder indagações na forma de "*como?*" deram lugar a experiências demonstrativas dedutivas em cidades comerciais da costa oeste da Ásia Menor, partes da Itália e da Grécia.

Convém destacar que os primeiros anos da matemática grega foram ofuscados pelo brilho dos Elementos de Euclides, escritos por volta de 300 a.C. Assim, nossa principal fonte de informações para estudar a produção grega nesse período é o chamado Sumário Eudemiano de Proclo, que mesmo vivendo mais de mil anos depois, ainda teve acesso a muitos trabalhos daquela época. Segundo Eves (2004, p.97), "esse sumário consiste nas páginas de abertura do Comentário sobre Euclides, Livro I", e traz uma síntese do desenvolvimento da geometria grega desde seus primórdios até os dias de Euclides.

Entre os matemáticos ilustres citados no Sumário Eudemiano está Pitágoras, um personagem místico do qual pouco se sabe com algum grau de certeza. Acredita-se que tenha nascido por volta de 572 a.C. na ilha de Samos, próxima de Mileto, que tenha sido discípulo de Tales e que tenha residido por algum tempo no Egito. Ao retornar para Samos e encontrá-la sob o domínio persa, decidiu emigrar para Crotona, uma colônia grega no sul da Itália onde fundou a escola pitagórica, uma confraria unida por ritos secretos e dedicada ao estudo da matemática, da filosofia e das ciências naturais.

Ademais, além da perda de documentos históricos, outro motivo que contribui para a manutenção da obscuridade de Pitágoras se deve ao fato de que essa escola era comunitária, isto é, o conhecimento e a propriedade eram comuns. Por esta razão, "a atribuição de descobertas não era feita a um membro específico da escola" (Boyer, 1993, p. 36).

Contudo, embora a escola pitagórica possuísse essa característica, convencionou-se atribuir a Pitágoras a descoberta do fato de que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. Nesse ponto, convém observar que, segundo Roque (2012, p. 126), "Euclides jamais emprega essa nomenclatura, nem atribui o teorema a Pitágoras ou a quem quer que seja".

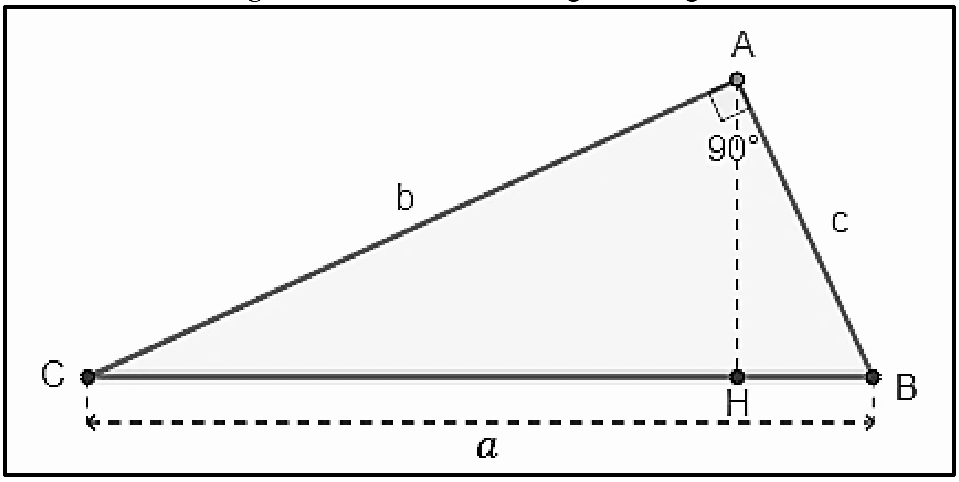
3 Teorema de Pitágoras: demonstrações para sala de aula

Em que pese esse teorema já ser conhecido pelos babilônios desde os tempos de Hamurabi, conjectura-se que a primeira demonstração geral pode ter sido feita por Pitágoras utilizando equivalência de áreas. Roque (2012), porém, destaca que nenhuma prova conhecida desse teorema geométrico sobre o triângulo retângulo parece ter sido fornecida por um pitagórico, mas sim, um estudo denominado de ternos pitagóricos, ou triplas pitagóricas.

Fato é que com centenas de demonstrações, o teorema de Pitágoras é um dos mais importantes teoremas da Matemática e suas aplicações permeiam diversas áreas, como: na arquitetura, na engenharia, na topografia, na cartografia, na navegação, bem como na própria Matemática, como na relação fundamental da trigonometria, no cálculo da distância entre dois pontos, da altura de um triângulo equilátero, ou no cálculo da diagonal de um paralelepípedo retângulo.

Assim, dado o ΔABC da Figura 2, retângulo no ponto A, temos que $\overline{BC} = a$ é a hipotenusa, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ são os catetos. Neste caso, o teorema de Pitágoras é representado pela relação $a^2 = b^2 + c^2$.

Figura 2: Elementos do triângulo retângulo

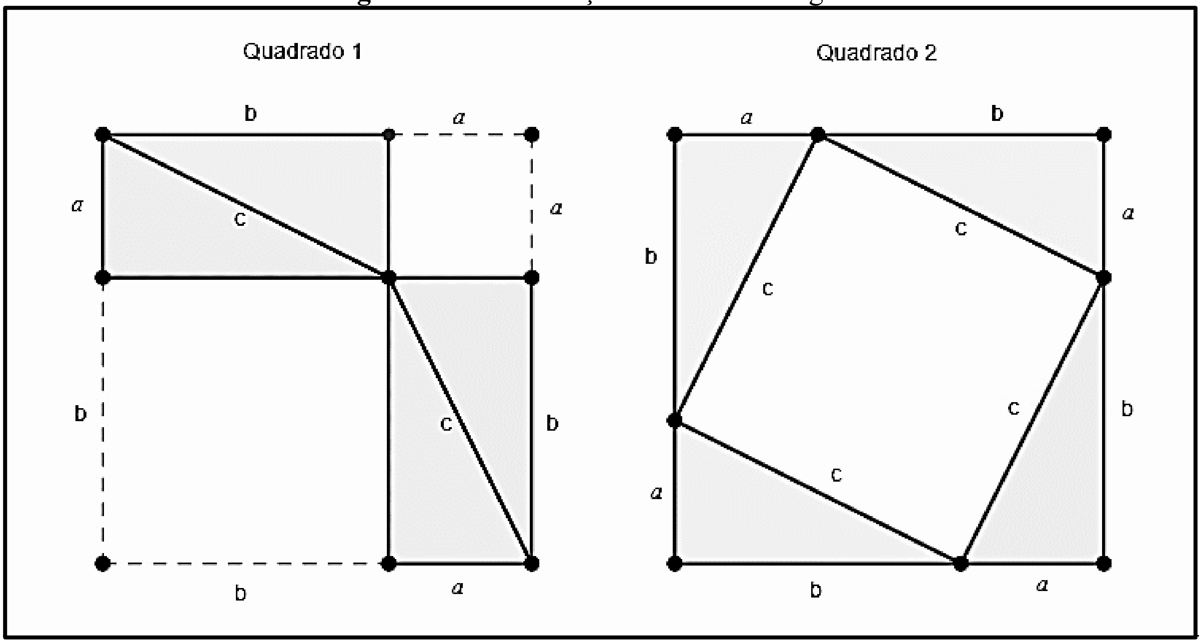


Fonte: elaborado pelos autores (2024).

O teorema de Pitágoras é uma relação métrica válida em todo triângulo retângulo. De acordo com Alsina (2010), a versão mais genuína tem o seguinte enunciado: “Dado um triângulo de vértices ABC, o ângulo A é reto (triângulo retângulo), se e somente se, a área do quadrado sobre o lado a, oposto a A, é a soma das áreas dos quadrados sobre os outros lados b e c” (Alsina, 2010, p. 42, tradução nossa).

Como dissemos anteriormente, um raciocínio atribuído a Pitágoras para demonstração deste teorema é pela decomposição de figuras. Para mostrar esta decomposição, vamos considerar quatro triângulos retângulos genéricos iguais com catetos medindo b e c e hipotenusa medindo a e arrumá-los de duas maneiras diferentes de modo a obter dois quadrados com lados medindo $a + \mathrm{b}$ conforme expresso na Figura 3.

Figura 3: Demonstração atribuída a Pitágoras



Fonte: Adaptado de Eves (2004, p. 103).

O Quadrado 1 (Q1) foi decomposto em seis partes, sendo: os quatro triângulos retângulos congruentes ao triângulo retângulo genérico considerado, um quadrado de lado a e um quadrado de lado b. Já o Quadrado 2 (Q2) foi decomposto em cinco partes, sendo: os quatro triângulos retângulos congruentes ao triângulo retângulo genérico considerado e um quadrado de lado c. Como Q1 e Q2 tem lados medindo $a + \mathrm{b}$ suas áreas são iguais. Do mesmo modo, a soma das partes de Q1 deve ser igual a soma das partes de Q2. Assim:

$$4 \times \frac{a \times \mathrm{b}}{2} + a^2 + \mathrm{b}^2 = 4 \times \frac{a \times \mathrm{b}}{2} + \mathrm{c}^2$$

$$a^2 + \mathrm{b}^2 = \mathrm{c}^2$$

Para demonstrar que a parte central de Q2 é um quadrado de lado c, basta usar o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° e, portanto, cada ângulo da parte central de Q2 é igual a 90°.

Além desta demonstração, Loomis (1940) em seu livro The Pythagorean Proposition, conseguiu coletar mais de três centenas de demonstrações do teorema de Pitágoras, algumas delas serão apresentadas a seguir. Antes, porém, convém destacar que a escolha de três números inteiros positivos que possam representar os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo está umbilicalmente ligado ao teorema de Pitágoras.

Conforme dito anteriormente, essa terna numérica é chamada de terno pitagórico e há evidências históricas concretas, gravadas em tábuas de argila que datam de 1800 a.C., de que os babilônios antigos sabiam como encontrá-los. Em uma delas, identificada por Plimpton 322, temos a presença de uma tabela de 4 colunas e 15 linhas de números em escrita cuneiforme do período. Embora alguns matemáticos a interpretem como uma lista de ternas pitagóricas, outros defendem a aplicação do teorema no cálculo aproximado da raiz quadrada de 2. Contudo, um artigo de Robson (2002), publicado na Mathematical Association of America, diz que esta interpretação não é aceitável.

Eves (2004, p.104) destaca que os pitagóricos também recebem o crédito pela fórmula

$$\mathrm{m}^2 + \left(\frac{\mathrm{m}^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{m}^2+1}{2}\right)^2$$

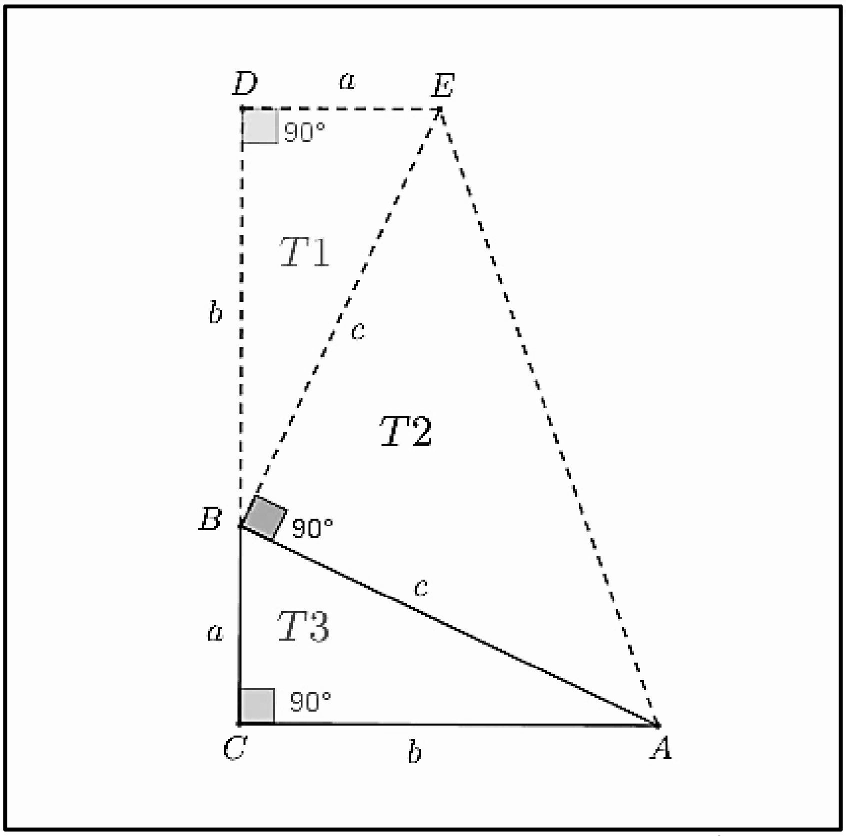
que gera um terno pitagórico $\forall \mathrm{m} > 1$ ímpar. Analogamente, a fórmula

$$(2\mathrm{m})^2 + (\mathrm{m}^2 - 1)^2 = (\mathrm{m}^2 + 1)^2$$

$\forall \mathrm{m} > 1$ par ou ímpar é atribuída a Platão e serve para o mesmo propósito de geração de ternos pitagóricos. Em que pese sua relevância, nenhuma delas é capaz de fornecer todos os ternos pitagóricos, nem assegurar a validade geométrica do teorema em todos os casos, fazendo com que Roque (2012) optasse pela grafia "teorema 'de Pitágoras'" ao falar do teorema. A análise desses ternos não será objeto desse trabalho por merecer um estudo mais detalhado.

Retomando as demonstrações, uma forma interessante de provar o teorema de Pitágoras é atribuída a James Abrahan Garfield (1831 – 1881), antes de ser eleito presidente dos Estados Unidos. Na condição de membro da Câmara de Representantes, rascunhou esta demonstração que posteriormente veio a ser publicada. Para reproduzir a ideia de Garfield, considere o esquema da Figura 4. Nele temos dois triângulos retângulos congruentes ACB e BDE identificados, respectivamente, por T3 e T1, com $\mathrm{A\hat{C}B} = \mathrm{B\hat{D}E} = 90°$, dispostos no plano de tal forma que os pontos C, B e D sejam colineares. Assim, $\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{DE}} = a$, $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BD}} = b$ e $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BE}} = c$.

Figura 4: Esquema da demonstração do Presidente



Fonte: Clube OBMEP, acessado em 25 mai. 2024.[3]

Por construção é fácil observar que $D\hat{B}E$ e $A\hat{B}C$ são complementares. E mais, que o ΔABE, identificado por T2, formado a partir do traçado do segmento $\overline{AE}$, é retângulo isósceles. Assim, o trapézio ACDE de bases $\overline{AC} = b$ e $\overline{DE} = a$ com altura $\overline{CD} = a + b$ tem área S dada por:

$$S = \frac{(a+b).(a+b)}{2}$$

$$S = \frac{a^2+2ab+b^2}{2}$$

Essa mesma área S pode ser obtida através da soma das áreas dos triângulos T1, T2 e T3:

$$T1 = \frac{a.b}{2} \qquad ; \qquad T2 = \frac{c^2}{2} \qquad e \qquad T3 = \frac{a.b}{2}.$$

Ou seja:

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{2} = \frac{a.b}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{a.b}{2}$$

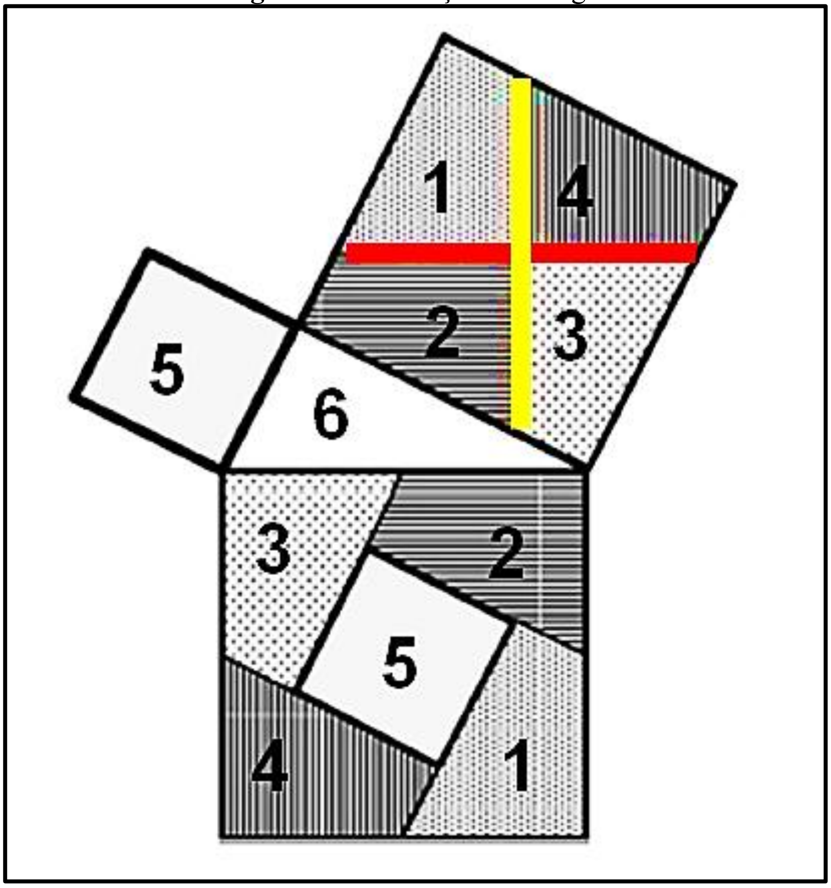
de onde se conclui, após alguns procedimentos algébricos, a relação atribuída a Pitágoras

[3] Disponível em *http://clubes.obmep.org.br/blog/problemao-uma-demonstracao-do-teorema-de-pitagoras/*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Uma das maneiras mais tradicionais de provar a validade desse teorema é atribuída ao britânico Henry Perigal que publicou em 1872 uma demonstração para o Teorema de Pitágoras relacionado ao estudo de áreas, que pode ser apreciada na Figura 5.

Figura 5: Construção de Perigal



Fonte: Adaptado de Wagner (2015, p. 8).

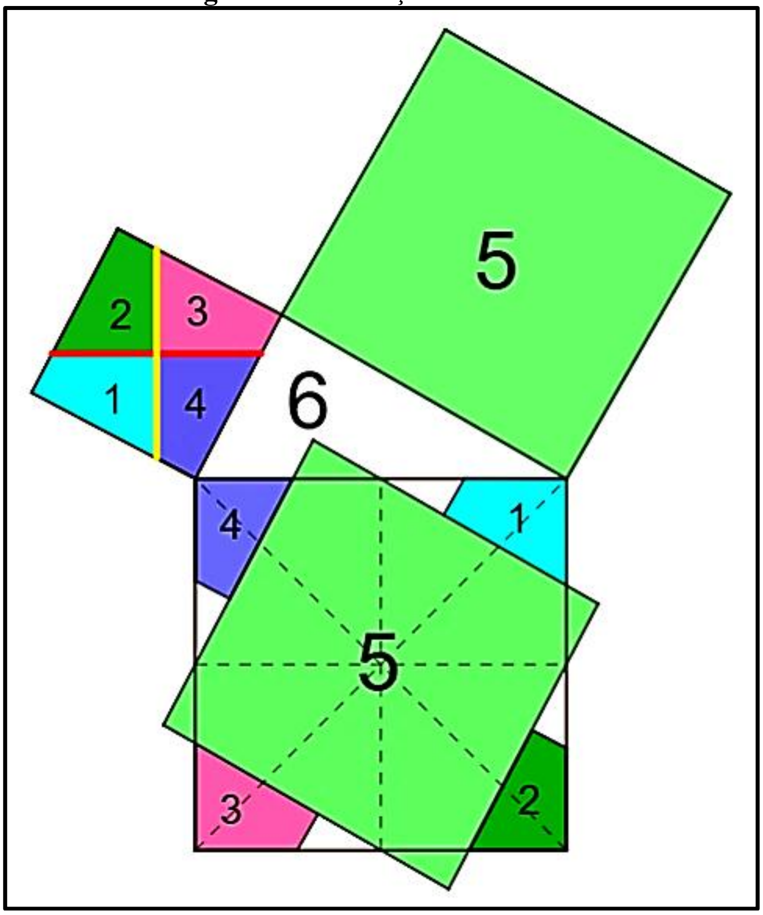
Com o objetivo de mostrar que a soma das áreas dos quadrados erguidos sobre os catetos preenchia completamente o quadrado construído sobre a hipotenusa, o autor traçou dois segmentos que passavam pelo centro do quadrado feito sobre o cateto maior, um paralelo à hipotenusa do triângulo 6 destacado na cor vermelha, e outro perpendicular a ela destacado na cor amarela.

Nessa dissecação, o quadrado construído sobre o cateto maior do triângulo 6 foi dividido em quatro partes congruentes, e, portanto, de mesma área, identificadas por 1, 2, 3 e 4. A área dessas quatro partes e mais a área do quadrado 5 construído sobre o cateto menor, preenchem completamente a área do quadrado construído sobre a hipotenusa.

revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Giorgio Ferrarese da Universidade de Torino na Itália observou que a elegante construção proposta por Perigal admitia tratamento simétrico em relação ao cateto menor, ou seja, que era possível dividir o quadrado construído sobre o cateto menor da mesma maneira que Perigal dividiu o quadrado construído sobre o cateto maior. Na Figura 6 apresentamos o resultado dessa dissecação, com o quadrado construído sobre o cateto maior do triângulo 6 deslizando para o centro do quadrado construído sobre a hipotenusa.

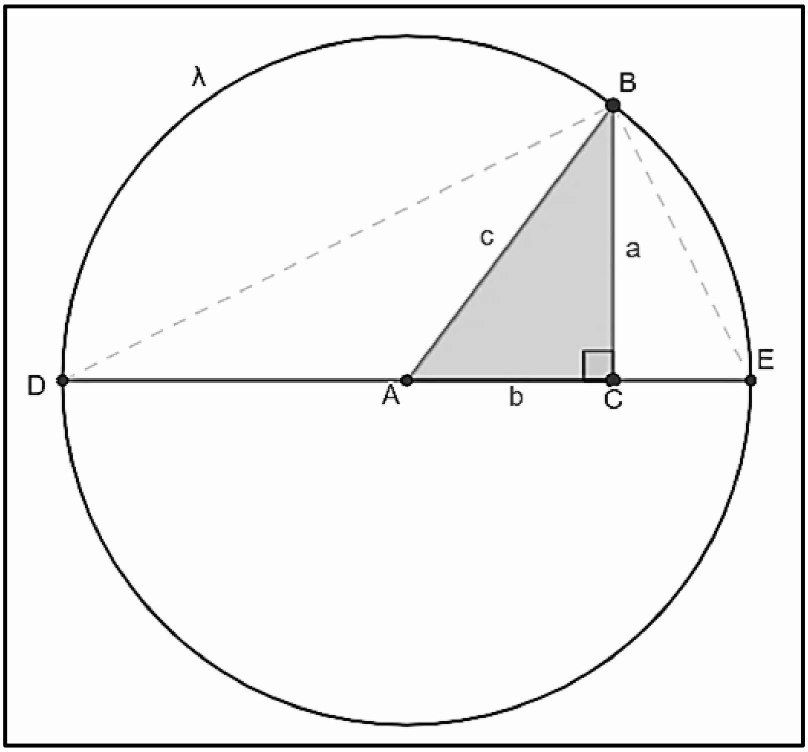
Figura 6: Construção de Ferrarese



Fonte: Adaptado do site *https://www.cut-the-knot.org/*, 2024.

De acordo com Loomis (1940, p. 59) a ideia da construção que aparece na Figura 7 é atribuída a Leibniz. Em um círculo λ de centro em A e raio $\overline{AB} = c$ tome um ΔABC, retângulo em C, com um dos catetos construído sobre o diâmetro $\overline{DE}$ de λ. Nessas condições, temos que $\overline{DE} = 2c$ e $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{AE} = c$. E mais, $\overline{CE} = c - b$ e $\overline{CD} = c + b$.

Figura 7: Construção atribuída a Leibniz



Fonte: Adaptado de Loomis (1940).

Por construção, $\overline{AC}$ está sobre o diâmetro $\overline{DE}$ e o ΔBDE está inscrito em uma semicircunferência, pois $B \in \lambda$. Logo, o ΔBDE é retângulo em B. E mais, como $\overline{BC} = a$ é a altura do ΔBDE, temos que $(\overline{BC})^2 = \overline{CD} \times \overline{CE}$. Assim:

$$a^2 = (c + b) \times (c - b)$$

nos levando a conclusão de que

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

4 Sugestões para uso das demonstrações em sala de aula

Silva e Pires (2012) apontam que "o papel da demonstração na Educação Básica não pode se limitar a uma concepção de formalização e de averiguação técnica da validade de certas propriedades, indo além, implicando convencimento por meio de uma comunicação matemática adequada" (Silva; Pires, 2012, *apud* Silva; Marra Júnior, 2020, p. 206).

No Brasil, em que pese o uso de demonstrações estarem presentes no Ensino Superior, diversos estudos revelaram que muitos egressos de cursos de Licenciatura reportam dificuldades diante da necessidade de realizá-las em razão da baixa familiaridade com as estruturas lógicas envolvidas. Diante disso, a sugestão de caminhos que possibilite ao professor utilizá-las como recurso metodológico de ensino, durante a Educação Básica, pode não só ajudar na formação continuada do professor, como também na superação da passividade percebida nos estudantes dessa etapa.

Assim, a demonstração atribuída a Pitágoras, representada na Figura 3, pode ser utilizada em sala de aula inicialmente na forma de um quebra-cabeça, em que os alunos podem ser desafiados, mediante manipulação das peças do kit distribuído pelo professor, e com a supervisão deste, a organizar os oito triângulos retângulos de hipotenusa c e catetos a e b, além dos três quadrados de lados a, b e c, de duas maneiras diferentes, de modo a obter dois quadrados com lados medindo $a + \mathrm{b}$.

Após os dois quadrados de lados medindo $a + \mathrm{b}$ terem sido organizados, o professor pode perguntar se esses quadrados apresentam a mesma área ou não? Para ajuda-los a responder esta pergunta, o professor pode sugerir que os alunos reorganizem um deles de modo a ficar sobreposto ao outro, direcionando os alunos para que percebam que ambos ocupam a mesma área. A partir daí, basta somar as áreas das partes de cada quadrado de lado $a + \mathrm{b}$ e realizar alguns artifícios algébricos para concluir o teorema de Pitágoras, isto é, que $a^2 + \mathrm{b}^2 = \mathrm{c}^2$.

A demonstração do presidente Garfield, representada na Figura 4, pode ser apresentada com auxílio de um software de geometria dinâmica como, por exemplo, o Geogebra, em que o aluno, sob a orientação do professor, utilizará ferramentas específicas para construir os triângulos T1, T2 e T3, para posteriormente observar e comparar as suas áreas. Alternativamente, também é possível utilizar material manipulável contendo kits com os três triângulos retângulos envolvidos, sendo um com catetos c e dois com catetos a e b e hipotenusa c, para que os alunos reproduzam a construção do presidente Garfield e concluam a relação atribuída a Pitágoras.

As construções de Perigal e Ferrarese presentes, respectivamente, nas Figuras 5 e 6, também podem ser apresentadas através de material manipulável com kits contendo as peças envolvidas. Por ser mais fácil de visualizar, recomendamos que a atividade seja iniciada pela reprodução da construção proposta por Perigal. Sugerimos que o professor inclua no kit com as peças, uma espécie de "planta baixa" desenhada em papel cartão, ou pintada em tecido do tipo TNT liso, contendo apenas o contorno externo dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo 6. É importante destacar que, embora a "planta baixa" com o contorno externo dos quadrados possa ser utilizada nas duas construções, sugerimos que sejam constituídos kits para cada situação específica com as peças que serão manuseadas pelos alunos.

Todas as quatro demonstrações apresentadas até aqui estão ancoradas na ideia de equivalência de áreas de polígonos, sendo uma oportunidade para que o professor, antes de introduzir o assunto teorema de Pitágoras, em especial a apresentação dessas demonstrações, promova uma revisão sobre o assunto áreas de figuras planas.

Por fim, recomendamos que a construção atribuída a Leibniz, que aparece na Figura 7, seja apresentada com auxílio de um software de geometria dinâmica como, por exemplo, o Geogebra. Durante a construção proposta, o professor poderá aproveitar a ocasião para relembrar os alunos sobre a diferença entre ângulo central e ângulo inscrito em uma circunferência.

Outro ponto importante que pode ser revisado durante a construção é sobre o teorema que garante que todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo. A esse respeito, recomendamos que o professor conheça o material proposto por Corrêa, Alves e Pereira (2024), que têm construções para serem feitas no Geogebra pelos alunos, sendo uma para mostrar que todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo, e a outra para demonstrar o teorema de Pitágoras.

5 Considerações Finais

A desconstrução de barreiras no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, em especial da geometria, é um processo lento e contínuo. A inquietação que leva diversos docentes a buscarem respostas em cursos de pós-graduação demonstra o desejo destes em contribuir com a mudança do cenário atual. Entretanto, entende-se que o sucesso depende de todos os entes envolvidos no processo.

As demonstrações aqui apresentadas possuem um nível de abstração compatível com o 9º ano do Ensino Fundamental, observado as exigências em relação as manipulações algébricas, as aplicações de elementos da geometria e as construções geométricas elementares e, por esta razão, entende-se que estas podem contribuir para o desenvolvimento das habilidades esperadas em um aluno que esteja concluindo este nível de ensino, bem como, fazer uso para futuras aplicações. De outro lado, as demonstrações apresentadas tornam-se um material que pode contribuir ao processo de ensino do teorema de Pitágoras, bem como à formação inicial ou continuada de professores de Matemática. Ademais, um diferencial em relação ao apresentado nos livros didáticos de Matemática.

Durante o processo de revisão da literatura, no que tange as demonstrações do teorema de Pitágoras, observou-se nos trabalhos selecionados que há uma indicação de uso de outras demonstrações que diferem das formas comumente apresentadas em livros didáticos. Entretanto, em seu bojo essa indicação não é confirmada, assim como o uso de materiais diversificado para comprovação do citado teorema. Portanto, vislumbra-se que trouxemos contribuições ao processo de ensino quando sugerimos, discutimos, demonstramos e apresentamos possibilidade de uso de materiais manipuláveis. Por fim, informamos que a pesquisa ainda não está conclusa e que novas demonstrações serão apresentadas na versão final do relatório de pesquisa e na sequência didática integrante do produto educacional associado.

Referências

ALSINA, C. **La secta de los números**: el teorema de Pitágoras. Espanha: RBA, 2010.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução de Elza Furtado Gomide. 10ª reimpressão. São Paulo: Blucher, 1993.

BRASIL. Diretoria de Avaliação da Educação Básica. Sistema de Avaliação da Educação Básica: Matemática. **Relatório de Resultados do Saeb 2021**. v. 01. Brasília: INEP/MEC, 2023. Disponível em https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2021/resultados/relatorio_de_resultados_do_saeb_2021_volume_1.pdf. Acesso em 08 fev. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192. Acesso em 08 fev. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p. Disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em 22 fev. 2025.

CORRÊA, F. E.; ALVES, F. J. da C.; PEREIRA, C. C. M. **Aprender Interagindo com o Geogebra**: Uma proposta para o ensino de relações métricas no triângulo retângulo, 2024. 35p. Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/handle/capes/921198. Acesso em: 30 jan. 2025.

CRESWELL, J.W. **Projeto de pesquisa**: métodos qualitativo, quantitativo e misto. Tradução de Luciana de Oliveira da Rocha. 2ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.

CUT THE KNOT. **Pythagorean theorem**. Disponível em: https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml#. Acesso em: 28 out. 2024.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Higyno Hugueros Domingues. Campinas: Editora Unicamp, 2004.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 4ª ed. São Paulo (SP): Atlas, 2002.

LOOMIS, E. S. **The Pythagorean Proposition**: classics in Mathematics Education Series. Second edition. Washington: National council of teachers of Mathematics, 1940.

ROBSON, E. **Words and Pictures**: New Light on Plimpton 322. The American Mathematical Monthly, v. 109, n. 2, 2002, p. 105–120. Disponível em: https://doi.org/10.2307/2695324. Acesso em: 11 fev. 2025.

ROQUE, T. **História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SILVA, J. C.; MARRA JUNIOR, E. D. Demonstrações matemáticas no Ensino Médio: o que pensam e sentem os estudantes. **UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 16, n. 59, p. 204-226, ago. 2020. Disponível em: https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/137. Acesso em: 30 mar. 2025.

WAGNER, E. **Teorema de Pitágoras e Áreas**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. Disponível em: https://www.obmep.org.br/docs/apostila3.pdf. Acesso em: 02 fev. 2024.

ZBS - Data Analytics Intelligence. ZBS Educa: **Resultados ENEM**. Disponível em: https://www.zbs.com.br/enem-anteriores. Acesso em: 05 mai. 2024.