revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Por que a circunferência trigonométrica tem raio 1? Resolução de problemas trigonométricos à luz da Teoria dos Campos Conceituais

DOI: https://doi.org/10.33871/rpem.2025.14.34.10401

Fillipe Walis Lima Vicente[1]
Rieuse Lopes[2]
Saulo Macedo de Oliveira[3]
Janine Freitas Mota[4]

Resumo: Este artigo tem como objetivo analisar e explicitar, à luz da Teoria dos Campos Conceituais, os invariantes operatórios mobilizados por acadêmicos da Licenciatura em Matemática durante a resolução de problemas envolvendo Trigonometria, com base nas interações e discussões ocorridas ao longo da aplicação de uma sequência didática, com ênfase nos processos que culminaram na construção coletiva da solução proposta. A referida sequência foi aplicada em três aulas de 50 minutos, com acadêmicos do primeiro período do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública. A análise das respostas dadas pelos acadêmicos às atividades propostas evidenciou que, nas situações envolvendo a Trigonometria no triângulo retângulo, os conceitos-em-ação e teoremas-em-ação mobilizados se mostraram válidos e contribuíram, de forma significativa, para a resolução das atividades. Por outro lado, diante de situações relativas à Trigonometria na circunferência, esses invariantes operatórios precisaram ser adaptados, reavaliados, recombinados e, em alguns casos, até descartados.
Palavras-chave: Círculo Trigonométrico; Resolução de Problemas; Teoria dos Campos Conceituas; Trigonometria.

Why does the trigonometric circle have a radius of 1? Solving trigonometric problems in the light of Conceptual Fields Theory

Abstract: This article aims to analyze and explain, in light of Conceptual Field Theory, the operational invariants mobilized by academics in the Mathematics Degree program during the resolution of problems involving trigonometry, based on the interactions and discussions that occurred throughout the application of a didactic sequence, with an emphasis on the processes that culminated in the collective construction of the proposed solution. The sequence was applied in three 50-minute classes with first-year students in the Mathematics Degree program at a public university. The analysis of the students' responses to the proposed activities showed that, in situations involving trigonometry in right-angled triangles, the concepts-in-action and theorems-in-action mobilized proved to be valid and contributed significantly to the resolution of the activities. On the other hand, in situations involving trigonometry in circles, these operational invariants needed to be adapted, reevaluated, recombined, and, in some cases, even discarded.
Keywords: Trigonometric Circle; Mathematics Degree Course; Problem Solving; Conceptual Fields Theory; Trigonometry.

1 Considerações Iniciais

[1] Licenciado em Matemática. Universidade Estadual de Montes Claros. E-mail: walisvf@gmail.com - ORCiD: https://orcid.org/0009-0007-4958-3285.
[2] Doutora em Educação Matemática. Universidade Estadual de Montes Claros. E-mail: rieuse.lopes@unimontes.br - ORCiD: https://orcid.org/0000-0003-2342-3084.
[3] Mestrando em Educação. Universidade Estadual de Montes Claros. E-mail: saulo.oliveira@edu.unimontes.br - ORCiD: https://orcid.org/0009-0002-8183-149X.
[4] Doutora em Educação Matemática. Universidade Estadual de Montes Claros. E-mail: janine.mota@unimontes.br - ORCiD: https://orcid.org/0000-0003-1653-9521.

Este estudo propõe uma análise da mobilização de conceitos relacionados à Trigonometria, observada durante o desenvolvimento de uma sequência didática aplicada a 20 (vinte) acadêmicos do primeiro período do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Montes Claros (Unimontes). O objetivo deste artigo é analisar e explicitar, à luz da Teoria dos Campos Conceituais, os invariantes operatórios mobilizados por acadêmicos da Licenciatura em Matemática durante a resolução de problemas envolvendo Trigonometria, com base nas interações e discussões ocorridas ao longo da aplicação de uma sequência didática, com ênfase nos processos que culminaram na construção coletiva da solução proposta.

A sequência didática elaborada nesta pesquisa foi inspirada nas concepções de Zabala (1998) sobre a organização intencional e progressiva de atividades de ensino com intencionalidade pedagógica, orientada por objetivos de aprendizagem bem definidos; e nos pressupostos de Onuchic e Allevato (2011), que compreendem a Resolução de Problemas como uma metodologia ativa e investigativa para o ensino de Matemática. A estrutura adotada buscou articular elementos dessas abordagens, adaptando-os ao contexto e aos objetivos específicos do estudo.

Conforme Oliveira (2021), o ensino da Trigonometria tem recebido maior atenção nos últimos anos, não por ser uma dificuldade recente, mas por representar um desafio persistente enfrentado por estudantes ao longo de sua trajetória acadêmica. Igualmente, Muniz Neto (2013) argumenta que o ensino e a aprendizagem da Trigonometria ainda são pouco explorados pelos pesquisadores, sendo esse um assunto que apresenta dificuldades para estudantes, mas que carece de estudos mais aprofundados que investiguem as razões dessas dificuldades.

Abreu (2011) destaca alguns fatores que contribuem para os obstáculos na construção dos conceitos trigonométricos, como definições superficiais de ideias importantes, como rotações e o círculo trigonométrico; pouca ou nenhuma compreensão do papel da unidade no círculo trigonométrico ou aplicação inconsistente da unidade; e dificuldade na interpretação de gráficos que envolvem uma combinação de informações geométricas e numéricas.

O ensino da Trigonometria, dado seu caráter desafiador e as dificuldades apontadas por diversos autores, é essencial para o desenvolvimento de habilidades fundamentais nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática. Ao lidar com conceitos como ângulos, razões trigonométricas e suas diferentes representações, os estudantes desenvolvem raciocínio lógico e analítico – capacidades indispensáveis para a resolução de problemas.

Nesse contexto, a Trigonometria exige que os estudantes articulem diferentes registros de representação, como gráficos e expressões algébricas, o que contribui para uma compreensão mais integrada dos conceitos matemáticos. Dessa forma, sua relevância ultrapassa os limites do conteúdo em si, fortalecendo habilidades que são essenciais para o avanço no estudo da Matemática e na resolução de questões que demandam maior compreensão conceitual.

A abordagem dos conceitos de Trigonometria por meio da metodologia de Resolução de Problemas representa uma estratégia didático-pedagógica que integra a prática e o desenvolvimento do pensamento matemático em contextos reais. Essa articulação permite não apenas a construção de conceitos trigonométricos em situações práticas, mas também a análise de sua interconectividade com outras disciplinas e áreas da Matemática, como a Álgebra e o Cálculo.

Silva (2015, p. 01), ao destacar que "a Resolução de Problemas é uma importante ferramenta para a aprendizagem de Matemática, pois possibilita ao aluno desenvolver suas potencialidades na sala de aula, além de poder associar a vivência do aluno dentro da escola e fora dela", reforça a ideia de que essa metodologia promove o desenvolvimento das potencialidades dos estudantes, tanto em contextos escolares quanto em suas vivências cotidianas. A Resolução de Problemas emerge, portanto, como um elemento central nos processos de ensino e de aprendizagem da Trigonometria, especialmente por permitir que os estudantes participem ativamente da construção do conhecimento.

Para D'Ambrósio (1989, p. 16), a Resolução de Problemas, como abordagem pedagógica na sala de aula, caracteriza-se por propiciar um ambiente pautado pela investigação, exploração e construção de novos conceitos. Essa pesquisadora destaca que "nesse processo o aluno envolve-se com o 'fazer' matemático no sentido de criar hipóteses e conjecturas e investigá-los a partir da situação problema proposta".

A fim de oportunizar uma confluência entre a Trigonometria e a Resolução de Problemas, foi proposta uma sequência didática a uma turma do primeiro período do curso de Licenciatura em Matemática da Unimontes. Essa sequência teve como problema gerador a seguinte questão: *por que a circunferência trigonométrica tem raio 1?* Avaliou-se que o estudo sobre a Resolução de Problemas e a Trigonometria, no contexto de uma aula no ensino superior, em um curso de Licenciatura, oferece uma oportunidade valiosa para aprimorar a prática pedagógica e contribuir para a pesquisa em Educação Matemática.

Esta pesquisa também visa contribuir para o desenvolvimento de estratégias didáticas, pois, ao analisar como diferentes métodos de Resolução de Problemas impactam a compreensão dos conceitos de Trigonometria, os professores, e futuros professores, podem identificar práticas que aprimorem a construção de conceitos matemáticos. Isso enriquece a experiência do aprendizado dos estudantes, além de preparar os futuros professores para lidar com os desafios que surgem no ensino da Trigonometria.

Para a análise e discussão dos dados produzidos, recorreu-se à Teoria dos Campos Conceituais (TCC) (Vergnaud, 2009) por entender que essa teoria proporciona a investigação da forma operatória do conhecimento na resolução de situações de aprendizagem vivenciadas por estudantes. Nesse ambiente, há um interesse por propriedades, relações e técnicas manifestadas pelos estudantes, de forma explícita ou implícita, na resolução de uma sequência didática, representando o que Vergnaud (2009) denomina como invariantes operatórios dos esquemas, que se manifestam sob a forma de conceitos-em-ação ou teoremas-em-ação. Ressalta-se que foram evidenciados os invariantes operatórios relacionados à Matemática básica, mobilizados pelos sujeitos da pesquisa, considerando-se que esses elementos desempenharam um papel significativo na construção de conceitos fundamentais para a aprendizagem da Trigonometria.

Este artigo está estruturado da seguinte forma: nesta seção inicial, são apresentadas as considerações introdutórias que contextualizam a pesquisa, explicitam seus objetivos e justificam suas escolhas metodológicas. As duas seções seguintes abordam os princípios teóricos que fundamentam o estudo – a Resolução de Problemas e a TCC. Posteriormente, discute-se a metodologia adotada. A penúltima seção é dedicada à Análise e Discussão de alguns resultados, com base em uma ótica cognitiva que busca compreender como os acadêmicos manifestaram sua compreensão relativa a conceitos da Trigonometria, à luz dos construtos teóricos da TCC. Por fim, são apresentadas as Considerações Finais do estudo.

2 Resolução de Problemas

Segundo a perspectiva de Ramirez (2006), a resolução de problemas é uma atividade que acompanha o ser humano desde as civilizações antigas, colocando-o em situações que requerem questionamento e reflexão, em contextos sociais e culturais e em ambientes educacionais. Esse enfoque didático, portanto, configura-se como uma prática inerente ao cotidiano e à história das sociedades, que permeia diferentes esferas de vida e níveis de formação.

Com o avanço das civilizações e o surgimento de questões cada vez mais complexas, consolidou-se o movimento da Resolução de Problemas como uma abordagem sistematizada, conforme apontam Morais e Onuchic (2014). Essa abordagem teórica visa desenvolver a capacidade dos estudantes de identificar, analisar e solucionar questões, promovendo um aprendizado mais significativo e conectado às vivências diárias e aos desafios da sociedade contemporânea.

Onuchic (1999), referindo-se à elaboração de Schroeder e Lester (1989), destaca três diferentes abordagens para essa estratégia pedagógica: 1) ensinar sobre resolução de problemas; 2) ensinar a resolver problemas; 3) ensinar matemática por meio da resolução de problemas.

Na primeira abordagem, segundo a autora, o professor busca destacar o modelo de George Pólya (2006) ou alguma variação dele.

Já ao ensinar a resolver problemas, que é a segunda abordagem da autora, "o professor se concentra na maneira de como a matemática é ensinada e o que dela pode ser aplicado na solução de problemas rotineiros e não rotineiros" (Onuchic, 1999, p. 206).

Na terceira abordagem, que enfatiza como ensinar a Matemática por meio da Resolução de Problemas, os problemas são considerados propósitos para a aprendizagem matemática. Nessa perspectiva, o processo de ensino se desenvolve com base em situações-problemas, que orientam a construção dos conteúdos matemáticos (Onuchic, 1999).

É possível que o termo *problema* nem sempre seja utilizado com precisão no contexto da Matemática. Desse modo, Allevato (2005) afirma que, embora o termo esteja bastante presente no cotidiano de quem trabalha com Matemática, muitas vezes seu uso não vem acompanhado de um consciente posicionamento sobre seu significado.

Com base nas discussões geradas pelos avanços nessa metodologia investigativa, emergiu a necessidade de definir o que constitui um problema. Thompson (1989), em sua pesquisa com professores, identificou duas concepções distintas. A primeira, considerada limitada, vê o problema como uma descrição de uma situação que envolve quantidades e uma pergunta que demanda a aplicação de operações aritméticas, com o foco central na obtenção de uma resposta correta. Allevato (2005) complementa essa visão, ao apontar a ênfase em um único caminho correto para a solução.

A segunda concepção, mais ampla, inclui quebra-cabeças e desafios que oferecem múltiplas abordagens e incentivam a descoberta de novas ideias. Pólya (2006) contribui com uma definição mais abrangente, sugerindo que um problema envolve a busca consciente de ações para atingir um objetivo claro, mas não imediatamente acessível. Onuchic (1999) reforça que o problema não é um exercício mecânico, mas uma questão que desperta interesse e demanda resolução criativa e exploratória.

Fundamentados nessa perspectiva, Onuchic e Allevato (2011) propõem um roteiro de atividades voltado à orientação de professores, com vistas à condução de aulas que promovam a investigação, o pensamento crítico e a autonomia dos alunos no processo de construção do conhecimento matemático. Esse roteiro é constituído por nove fases: 1) preparação do problema; 2) leitura individual; 3) leitura em conjunto; 4) resolução do problema; 5) observar e incentivar; 6) registro das resoluções na lousa; 7) plenária; 8) busca do consenso; e 9) formalização do conteúdo.

Cada uma das fases desse roteiro aborda construções que definem o papel do professor e do estudante na resolução de um problema, o que abrange pontos de reflexão em cada uma de suas etapas.

Na primeira fase, destaca-se a seleção do problema, o chamado problema gerador, uma vez que ele demanda um conteúdo ainda não conhecido pelos estudantes. As fases 2 e 3 abrem espaço para trocas de ideias mediante a identificação do problema (individualmente ou em grupo), com o objetivo de esclarecer dúvidas conceituais ou de conteúdo que possam surgir. Nas fases 3 e 4, é apresentada a resolução do problema, momento em que os estudantes traçam caminhos utilizando métodos e conteúdos distintos para resolver o problema em questão.

Já as discussões, reflexões e conferências acerca das resoluções apresentadas para o problema posto ocorrem nas fases 6, 7 e 8. Para complementar o processo, a formalização da resolução do problema é apresentada na fase 9.

As fases utilizadas para a estruturação da sequência didática produzida e implementada neste estudo serão apresentadas na seção dos Procedimentos Metodológicos. Elas enfatizam a atuação do professor e do estudante como parte de um processo fundamentado na Resolução de Problemas, explicitando tanto as ações mobilizadas para resolver um problema quanto a maneira como os conteúdos matemáticos serão abordados ao longo desse processo.

3 Teoria dos Campos Conceituais

A TCC, desenvolvida pelo filósofo, matemático e psicólogo francês Gérard Vergnaud, constitui-se em uma abordagem cognitivista voltada à compreensão da aprendizagem e do desenvolvimento de conceitos. Segundo Oliveira, Mota e Lopes (2024, p. 800), trata-se de “uma teoria cognitivista que busca propiciar uma estrutura coerente e alguns princípios básicos ao estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas, principalmente das que se revelam das ciências e das técnicas”. Essa concepção permite compreender como os sujeitos se apropriam de conhecimentos em situações variadas, articulando conceitos, representações e invariantes operatórios.

Do ponto de vista da prática docente, a TCC não tem a intenção de ser uma didática, mas de fornecer um quadro teórico que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos (Vergnaud, 1996). Essa teoria, além de auxiliar na organização das intervenções pedagógicas, tem, segundo Vergnaud (2009, p. 83), dois objetivos principais:

> (1) descrever e analisar a complexidade progressiva, a longo e a médio prazo, das competências matemáticas que os alunos desenvolvem dentro e fora da escola, e (2) estabelecer melhores conexões entre a forma operacional de conhecimento, que consiste na ação no mundo físico e social na forma predicativa do conhecimento, que consiste nas expressões linguísticas e simbólicas desse conhecimento.

Vergnaud (1983) articulou a noção de campo conceitual em três princípios fundamentais: um conceito não se forma em um só tipo de situação; uma situação não se analisa com um só conceito; e a construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito, ou de todos os aspectos de uma situação, é um processo longo.

Contudo, um campo conceitual pode ser pensado em termos de produção do conhecimento científico, bem como resultado da produção intelectual de qualquer indivíduo, advindo de situações cotidianas.

Nesse sentido, um campo conceitual exige uma variedade de conceitos, procedimentos e representações simbólicas em estreita conexão, afirma Vergnaud (1996). Nessa mesma inspiração, esse teórico define que a construção dos conceitos é dada por três componentes inter-relacionados: (S) um conjunto de situações que dá sentido ao conceito, reconhecido como seu referente; (I) um conjunto de invariantes operatórios, como objetos, propriedades e relações, sobre os quais repousa a operacionalidade do conceito, ou o conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito, e podem ser reconhecidos e usados pelos sujeitos para analisar e dominar as situações; (R) um conjunto de representações simbólicas. Esses três componentes são designados simbolicamente como S I R.

Sendo assim, pode-se compreender que o sujeito vivencia uma série de situações que evocam determinados invariantes operatórios. Para o autor, o campo conceitual é constituído pela tríade de conjuntos inter-relacionados: as situações (S), os invariantes (I) e as representações simbólicas (R), articulando-se de modo que: o conjunto de situações corresponde ao referente do conceito; os invariantes operatórios representam seus significados; e as representações simbólicas, seus significantes (signos). Dessa forma, o sentido de um conceito não é fixo, mas construído progressivamente por meio da diversidade de situações nas quais ele é mobilizado.

Em uma situação, para identificar os objetos e suas relações mediante os objetivos e as regras de condutas mobilizados nos esquemas, o sujeito dispõe de vários tipos de conhecimentos, derivados dos conceitos-em-ação e teoremas-em-ação. O esquema é a organização da conduta voltada para certa classe de situações. Os teoremas-em-ação e os conceitos-em-ação são invariantes operatórios, componentes essenciais dos esquemas.

Para Vergnaud (2009), os conceitos-em-ação constituem um objeto, propriedades e relações ou uma categoria de pensamento considerada relevante. Eles se articulam por meio dos teoremas-em-ação, que são proposições que podem ser verdadeiras ou falsas. Essas proposições permanecem, em sua maioria, implícitas nas ações do sujeito, embora possam se tornar explícitas.

Desse modo, conceitos-em-ação e teoremas-em-ação podem tornar-se verdadeiros conceitos e teoremas específicos. Logo, é oportuno afirmar que o conhecimento explícito pode ser comunicado a outros e discutido, enquanto o conhecimento implícito não apresenta essa possibilidade. Assim, na abordagem de uma situação, os dados a serem trabalhados e a sequência de ações a serem realizadas dependem dos teoremas-em-ação e da identificação de diferentes tipos de elementos envolvidos.

De acordo com a TCC, uma das formas de analisar os conhecimentos-em-ação dos sujeitos é por meio do acompanhamento dos diversos momentos em que são chamados a resolver problemas, das estratégias utilizadas, dos esquemas mobilizados e dos modelos mentais construídos frente a novas situações.

Portanto, interessados nessa análise cognitiva, optou-se por empregar a TCC como fundamento na investigação dos invariantes operatórios mobilizados pelos estudantes nas situações de resolução e discussão, bem como na escolha dos esquemas utilizados no desenvolvimento da sequência didática.

Os invariantes – isto é, os teoremas-em-ação e os conceitos-em-ação – relacionados a conteúdos de Matemática da Educação Básica, foram analisados mediante o acompanhamento dos momentos em que os estudantes foram chamados a dar respostas ao problema, das estratégias de resolução adotadas, dos esquemas utilizados e dos modelos mentais construídos frente a novas situações que emergiram na implementação da sequência didática.

Na seção Análise e Discussão, apresentam-se alguns invariantes operatórios relacionados aos conhecimentos-em-ação da Educação Básica, mobilizados pelos estudantes no decorrer da sequência didática.

4 Procedimentos Metodológicos

Este estudo caracteriza-se como um Estudo de Caso, que, segundo Triviños (1987), é um método de pesquisa que permite aprofundar o conhecimento sobre um assunto específico, podendo oferecer subsídios para investigações sobre uma determinada temática. Assim, o objeto de análise deste artigo são as respostas dadas pelos acadêmicos do primeiro período do curso de Licenciatura em Matemática da Unimontes ao resolverem uma sequência didática sobre Trigonometria.

Compreende-se a sequência didática como um conjunto articulado de atividades planejadas com intencionalidade pedagógica, com vistas à aprendizagem progressiva de determinados conteúdos, habilidades ou gêneros discursivos. Trata-se de uma ferramenta que possibilita aos estudantes se apropriarem de saberes específicos por meio de situações que promovem os processos de ensino e de aprendizagem.

Quanto à abordagem, esta pesquisa se caracteriza como qualitativa, a qual, para Minayo (2014), não se baseia em quantificação, pois opera com o universo dos significados, motivos, aspirações, crenças, valores, conhecimentos e atitudes dos participantes.

Nesse sentido, entende-se que uma pesquisa de abordagem qualitativa se distingue por ir além de números e comparações estatísticas, com foco na compreensão e observação das relações sociais e no significado atribuído pelos indivíduos às suas experiências. Essa metodologia adota uma visão holística, ao considerar as nuances e a subjetividade presentes nas interações humanas, objetivando alcançar uma compreensão mais rica e contextualizada dos fenômenos sociais.

Nesse cenário, foi implementada uma sequência didática sobre Trigonometria em uma turma de calouros do primeiro período do curso de Licenciatura em Matemática da Unimontes. A participação desses acadêmicos oferece um contexto inicial para a pesquisa, uma vez que são novatos no curso e continuam em processo de familiarização com conceitos matemáticos mais avançados.

Conforme Triviños (1987), a observação utilizada neste estudo é uma técnica de coleta de dados essencial para compreender fenômenos diretamente no ambiente de investigação. Essa abordagem permite o contato direto com os participantes ou o uso de instrumentos específicos, o que favorece a coleta detalhada de informações necessárias para a análise dos fenômenos observados.

Portanto, a aplicação da sequência didática e a observação dos estudantes durante a resolução de problemas oferecem subsídios importantes para investigar o desenvolvimento de conceitos e as dificuldades enfrentadas por alunos em início de formação acadêmica.

Os dados foram coletados em três aulas de 50 minutos, por meio de gravação das aulas, aplicação e discussão de uma sequência didática, bem como da observação dos participantes da pesquisa. A sequência de atividades foi composta por duas atividades que contemplaram a Resolução de Problemas voltada à Trigonometria, com ênfase nos objetos matemáticos triângulo retângulo e círculo trigonométrico.

Na Atividade 1, inicialmente, foi promovida uma discussão sobre conceitos básicos de triângulos, como quantidade de lados, ângulos e a classificação. Em seguida, introduziu-se o conceito de razão, aplicando-o a triângulos quaisquer. O desenvolvimento do conteúdo evoluiu para o estudo das funções trigonométricas básicas – seno, cosseno e tangente – a partir do conceito de razão entre os lados do triângulo retângulo. Para concluir esta primeira atividade, foram introduzidos e explorados os ângulos notáveis, abordando suas propriedades e a aplicação das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente nesses ângulos.

Na Atividade 2, foi abordado o conceito de círculo trigonométrico, com ênfase na construção dos conhecimentos acerca dos conceitos de seno, cosseno e tangente com base em um ângulo dado. A atividade propôs que os acadêmicos esboçassem, com o auxílio de um transferidor, uma circunferência trigonométrica com raio unitário e, a partir dela, determinassem os valores de seno, cosseno e tangente para os ângulos de 30°, 45° e 60°. Concluída essa etapa de construção, foi apresentado o problema gerador da sequência: *por que a circunferência trigonométrica possui raio igual a 1?*

Para concluir, a última questão da sequência explorava um cenário hipotético, a qual perguntava se, ao alterar o raio da circunferência, os valores das razões trigonométricas também seriam modificados. Essa atividade foi projetada para aprofundar a compreensão dos conceitos trigonométricos, relacionando os valores das razões com a construção geométrica do círculo, estimulando os estudantes a refletir sobre o papel do raio na definição dessas funções e a fundamentar suas respostas com base nos princípios estudados.

A seguir, apresentam-se a estruturação, a aplicação e a discussão da sequência didática com base em nove momentos propostos por Onuchic e Allevato (2011), quais sejam: 1) preparação do problema; 2) leitura individual; 3) leitura em conjunto; 4) resolução do problema; 5) observar e incentivar; 6) registro das resoluções na lousa; 7) plenária; 8) busca do consenso e 9) formalização do conteúdo.

No primeiro momento, correspondente à preparação do problema, foram apresentados aos acadêmicos o tema do estudo, a forma como ele seria conduzido e o problema gerador que orientaria as discussões entre os participantes da pesquisa e os pesquisadores: *por que a circunferência trigonométrica tem raio 1*?

No segundo momento, foi solicitado que cada graduando realizasse a leitura individual das atividades que compunham a sequência didática, atentando-se ao que cada uma propunha, às possíveis formas de resolução e, por fim, ao problema gerador.

No terceiro momento, realizou-se a leitura em conjunto, com o objetivo de suscitar discussões entre os participantes da pesquisa.

No quarto momento, dedicado à *resolução do problema*, os acadêmicos, organizados em duplas, engajaram-se em um processo de análise, discussão e debate acerca das múltiplas possibilidades inerentes ao círculo trigonométrico, exploradas por meio das atividades e do problema gerador. Durante essa etapa, foram apresentados e debatidos diferentes pontos de vista e opiniões acerca da questão central do estudo: a justificativa para o raio unitário do círculo trigonométrico.

Ao longo de todo o processo, os pesquisadores *observavam* as discussões, instigando os acadêmicos com intervenções pontuais e *registrando na lousa* os achados e percepções por eles construídos – o que caracteriza o quinto e o sexto momentos indicados por Onuchic e Allevato (2011).

No sétimo momento, durante a sessão de *plenária*, os acadêmicos elaboraram possíveis conclusões para o questionamento proposto pelos pesquisadores, articulando esse momento ao oitavo, dedicado à *busca de um consenso* entre suas concepções e à justificativa dos resultados obtidos.

No nono e último momento, foi realizada a *formalização dos conteúdos e definições* apresentadas nas aulas. Nessa etapa, também foram recolhidas todas as atividades que compuseram a sequência didática, a fim de analisar as conclusões alcançadas pelos acadêmicos sobre a problemática proposta.

As discussões empreendidas entre os acadêmicos e pesquisadores serão apresentadas na próxima seção, intitulada Análise e Discussão. Essa análise foi conduzida com base nos constructos teóricos da TCC, os quais permitiram uma avaliação das barreiras cognitivas mobilizadas pelos acadêmicos ao lidar com os conceitos trigonométricos, assim como os conceitos-em-ação e teoremas-em-ação mobilizados por eles em suas falas.

Observou-se que as interações entre acadêmicos e pesquisadores, durante a execução da sequência didática, foram relevantes e evidenciaram algumas dificuldades enfrentadas pelos acadêmicos no que diz respeito à compreensão dos conceitos abordados. Essas dificuldades motivaram a realização de uma análise sobre a forma como eles compreendem e comunicam as definições matemáticas relacionadas à Trigonometria.

5 Análise e Discussão

Nesta seção, apresenta-se a análise dos dados relacionados aos conhecimentos-em-ação mobilizados pelos acadêmicos durante a realização da sequência didática. Foram selecionados trechos específicos para interpretação, com destaque para transcrições de diálogos e comentários ocorridos entre a professora e os acadêmicos, os quais permitem observar de forma mais detalhada os processos de construção do conhecimento.

A investigação se concentrou nas ações dos sujeitos durante a realização das atividades propostas, e a análise de suas respostas foi conduzida à luz da TCC, que se mostrou fundamental para identificar e interpretar os invariantes operatórios manifestados pelos acadêmicos ao longo da sequência didática. Esses invariantes referem-se aos componentes cognitivos mobilizados pelos sujeitos da pesquisa frente às situações-problema.

Analisou-se, também, a evolução temporal dos modelos explicativos dos acadêmicos, inferida por meio dos conceitos-em-ação e teoremas-em-ação utilizados no desenvolvimento das atividades. Isso porque, de acordo com Vergnaud (1996), é função do educador auxiliar o sujeito na construção de conceitos e teoremas explícitos e cientificamente aceitos.

Salienta-se que foram utilizados nomes fictícios para resguardar a identidade dos participantes deste estudo.

Após a resolução da Atividade 1 da sequência didática – momento em que foram discutidos conceitos referentes à Trigonometria no triângulo retângulo – questionou-se aos acadêmicos a existência de razões trigonométricas relacionadas ao ângulo reto e aos ângulos maiores que 90°.

> *Professora*: Como posso calcular o seno de 90°? É possível calcular utilizando o triângulo retângulo?
> *Gabriel*: Da mesma forma dos outros ângulos, cateto oposto dividido pela hipotenusa. Nesse caso a hipotenusa é o próprio cateto oposto, por isso o seno de 90° é um.
> *Professora*: E o cosseno de 90° no triângulo retângulo?
> *Gabriel*: Agora já não sei, porque não sei quem seria o cateto adjacente.

Observa-se que, ao se depararem com situações que exigem a mobilização de seus conhecimentos – especialmente em contextos distintos daqueles com os quais estão habituados no ambiente escolar tradicional –, os acadêmicos tendem a expressar uma série de questionamentos. Essas situações provocam instabilidades cognitivas que revelam tanto as compreensões já consolidadas quanto as fragilidades conceituais, tornando-se, assim, momentos potentes para a aprendizagem.

Notam-se esses questionamentos, especialmente referentes à Trigonometria no triângulo retângulo, o que indica que os acadêmicos aprenderam as definições e procedimentos de forma mecânica, sem compreender, de fato, os fundamentos que justificam essas relações. Essa lacuna na compreensão conceitual se evidencia quando são desafiados a aplicar os conhecimentos em contextos que exigem maior elaboração e reflexão.

Ao serem questionados sobre a possibilidade de calcular o seno de 90° utilizando o triângulo retângulo, era esperado que os acadêmicos reconhecessem que esse cálculo apenas seria possível por meio da circunferência trigonométrica. Essa proposição tinha como objetivo ampliar a compreensão dos conceitos trigonométricos, transpondo-os do contexto restrito do triângulo retângulo para a generalização proporcionada pela circunferência trigonométrica.

Quando o acadêmico Gabriel respondeu "*da mesma forma dos outros ângulos, cateto oposto dividido pela hipotenusa*", ele mobilizou conceitos-em-ação construídos com base no triângulo retângulo. Ou seja, ele expressou a ideia de que o seno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo agudo e a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo.

Observa-se que o estudante também mobiliza um conceito-em-ação ao afirmar que: "*nesse caso, a hipotenusa é o próprio cateto oposto, por isso o seno de 90° é um*". O acadêmico sabe que o seno de 90° tem medida igual a um – conceito provavelmente visto na Educação Básica –, mas não compreende o porquê desse valor. Para Lopes (2021, p. 259),

> a não atribuição de significados a uma representação para um determinado objeto matemático prejudica a compreensão do significado de tal objeto. Muitas vezes, os estudantes sabem operar com conceitos matemáticos, de maneira técnica, mas não compreendem o que de fato significa aquilo que estão fazendo.

No contexto do triângulo retângulo, o seno de um ângulo agudo é definido como a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa. No entanto, essa definição não se aplica ao ângulo de 90°, pois ele não é agudo e, portanto, não pode ser representado em um triângulo retângulo. Para atribuir significado ao seno de 90°, é necessário recorrer à circunferência trigonométrica, que permite generalizar as razões trigonométricas para ângulos maiores que 90° ou iguais a ele. Esse conceito pode ser ampliado na circunferência trigonométrica.

Assim, as razões seno e cosseno são definidas da seguinte forma: "Dado um arco trigonométrico AM de medida α, denominam-se cosseno e seno de α a abscissa e a ordenada do ponto M, respectivamente. Cos α = abscissa de M = x_M, Sen α = ordenada de M = y_M" (Paiva, 2002, p. 44).

Para Vergnaud (2009), os docentes devem fornecer situações problematizadoras que possuem significado para o estudante. Isso significa que, em cada Campo Conceitual, existe uma grande variedade de situações, e os conhecimentos dos estudantes são moldados pelas situações que, progressivamente, eles vão dominando. Dessa forma, são as situações que dão sentido aos conceitos, tornando-se o ponto de entrada para um dado Campo Conceitual. Porém, um só conceito precisa de uma variedade de situações para se tornar significativo, da mesma forma que uma só situação precisa de vários conceitos para ser analisada.

Percebe-se que o acadêmico erroneamente calculava o seno do arco de 90°, utilizando as propriedades do triângulo retângulo, por isso, questionou a respeito do cálculo do cosseno do arco de 90° no triângulo retângulo. Esse foi um momento em que eles foram confrontados com uma rede complexa de conceitos interligados entre si, a ponto de o acadêmico Gabriel admitir: "*Agora já não sei, porque não sei quem seria o cateto adjacente*".

Após uma intensa discussão sobre os diversos conceitos fundamentais da Trigonometria no triângulo retângulo, evidenciou-se a necessidade de ampliar a compreensão por meio da circunferência trigonométrica, especialmente no que se refere ao cálculo de razões trigonométricas.

Foram identificados alguns conhecimentos-em-ação mobilizados pelos acadêmicos, relacionados ao raio da circunferência trigonométrica, como: "*O seno de 90° é 1, porque a circunferência tem raio um*", "*Tem raio 1 porque o seno de 90° é 1*", "*Sim, já que o maior grau é o do seno de 90°, então não tem como o raio ser diferente de 1*", "*o maior grau é o do seno de 90°*".

Para aprofundar essa análise, apresenta-se a seguir um trecho do diálogo ocorrido entre a professora e os acadêmicos, no qual as compreensões mencionadas são discutidas de forma mais detalhada e argumentativa:

Professora: Por que a circunferência trigonométrica tem raio com medida 1?
Igor: É um valor arbitrário.
Bruno: Tem raio 1 porque o seno de 90° é 1.
Professora: Sendo assim, a medida do raio da circunferência tem que ser 1, porque o seno de 90° é 1?
Júnior: Sim, já que o maior grau é o do seno de 90°, então não tem como o raio ser diferente de 1.
Professora: Então você afirma que se o seno de 90° fosse 10, então o raio da circunferência trigonométrica também seria 10?
Marcelo: Nessa lógica sim.
Isabella: Eu já penso o contrário. O seno de 90° é 1, porque a circunferência tem raio um.
Professora: Não é a mesma coisa que seu colega disse?
Isabella: Não! Não é a mesma coisa. Quem determina o valor do seno de 90° é a medida do raio. Se o raio fosse 2, o seno de 90° seria 2. É o raio quem manda, então não é arbitrário.
Professora: Então você está dizendo que o seno de 90° só é 1, porque o raio da circunferência trigonométrica tem medida 1. Já que o seno de 90° tem medida 1, então não existe a

possibilidade de a circunferência trigonométrica ter raio diferente de 1 para o cálculo das razões trigonométricas. É isso?
Isabella: É isso mesmo!
Marcelo: Agora já não sei mais. Na verdade, nunca pensei sobre isso. Sempre vi nos livros de matemática que o raio é um, me disseram que o raio é um, nunca imaginei que pudesse ser diferente de um, e não sei responder porque tem essa medida.

Essa foi uma boa oportunidade para a construção de conhecimento, visto que os acadêmicos estavam motivados a compreender por que a circunferência trigonométrica tem raio com medida 1. Quando o acadêmico Bruno afirma que "*Tem raio 1 porque o seno de 90° é 1*", ele mobiliza o teorema-em-ação: o valor da medida do seno de 90° é quem determina o valor da medida do raio da circunferência trigonométrica.

Na mesma discussão, a acadêmica Isabella mobiliza outro teorema-em-ação ao afirmar: "*O seno de 90° é 1, porque a circunferência tem raio um*". Nesse caso, o teorema-em-ação mobilizado por ela é: o valor da medida do raio da circunferência trigonométrica é quem determina o valor da medida do seno de 90°.

O acadêmico Júnior, ao responder o questionamento da professora, diz: "*Sim, já que o maior grau é o do seno de 90°, então não tem como o raio ser diferente de 1*", assim, ele mobiliza o teorema-em-ação: o segmento de maior comprimento da circunferência trigonométrica, que também é o raio da circunferência, representa o seno de 90°, que é o ângulo de maior grau e é quem determina a medida do raio da circunferência.

Ressalta-se que o acadêmico Júnior se expressa sobre a Matemática em uma linguagem natural imprecisa, o que revela a ausência de clareza em relação aos significados de conceitos básicos. Isso se observa, por exemplo, quando afirma: "*o maior grau é o do seno de 90°*". Nesse caso, ele parece visualizar a circunferência trigonométrica apenas no primeiro quadrante e considera que o valor da medida do segmento de maior comprimento é o do seno de 90°, concluindo, assim, que a medida do raio não poderia ser diferente de 1.

Esclarece-se que os questionamentos a respeito da medida do raio da circunferência trigonométrica surgiram após o desenvolvimento da Atividade 1 da sequência didática, momento em que os acadêmicos calcularam as razões trigonométricas dos ângulos notáveis por meio da construção de triângulos retângulos isósceles e de triângulos com ângulos de 30° e 60°.

Cada dupla de acadêmicos desenvolveu cálculos com medidas dos lados dos triângulos distintas das utilizadas pelos colegas e concluiu que as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo em um triângulo retângulo não dependem do tamanho dos lados, mas da medida do ângulo.

Durante o desenvolvimento dessa atividade, foram discutidos os conceitos de razão, proporção e semelhança de triângulos. Mesmo assim, os acadêmicos não estabeleceram relações entre o triângulo retângulo e a circunferência trigonométrica, tampouco mobilizaram os conceitos de razão e semelhança discutidos anteriormente.

Nesta abordagem, considera-se que as razões trigonométricas seno e cosseno, inicialmente definidas pelas relações entre os catetos e a hipotenusa no triângulo retângulo, podem ser interpretadas geometricamente pelos acadêmicos com base na circunferência trigonométrica ou círculo unitário.

Nesse contexto, como o raio da circunferência é unitário (igual a 1), a hipotenusa do triângulo retângulo formado é também igual a 1, o que implica que o seno de um ângulo agudo corresponde numericamente à medida do cateto oposto, e o cosseno, à medida do cateto adjacente.

Dessa forma, as coordenadas do ponto determinado pelo ângulo no círculo unitário são dadas por ($\cos\theta$, $\text{sen}\,\theta$), estabelecendo uma ligação direta entre as razões trigonométricas e a representação geométrica no plano.

Consoante Belo e Burak (2020), a construção de conceitos matemáticos na Educação Básica é, com frequência, conduzida por meio de aulas expositivas, nas quais o professor apresenta definições, propriedades e exemplos e, por sua vez, os estudantes se dedicam à realização das listas de exercícios. Essa dinâmica tradicional de ensino e de aprendizagem tem sido amplamente discutida, sobretudo em razão de sua relação com as dificuldades enfrentadas pelos alunos na compreensão de conceitos matemáticos.

Essas dificuldades, muitas vezes, estão associadas às práticas pedagógicas adotadas, que representam um aspecto central a ser considerado na formação conceitual dos estudantes, especialmente nas disciplinas que demandam o uso da Matemática, como inferem Barbosa e Lopes (2020).

Para que haja progresso em um campo conceitual, é imprescindível que os estudantes tenham acesso a uma variedade de situações que favoreçam não apenas a aplicação de algoritmos, mas também a explicitação de seus invariantes operatórios e a construção compartilhada de significados.

6 Considerações Finais

Este estudo possibilitou a análise e explicitação, à luz da Teoria dos Campos Conceituais, dos invariantes operatórios mobilizados por acadêmicos da Licenciatura em

Matemática durante a resolução de problemas envolvendo Trigonometria, com base nas interações e discussões ocorridas ao longo da aplicação de uma sequência didática, com ênfase nos processos que culminaram na construção coletiva da solução proposta.

A aplicação de uma sequência didática voltada para a resolução de problemas permitiu a identificação de saberes implícitos mobilizados pelos acadêmicos, evidenciando a relevância dessa abordagem no ensino da Trigonometria.

Considera-se que a sequência didática contribuiu de forma significativa para o desenvolvimento do processo de aprendizagem na construção de conceitos básicos da Trigonometria, ao articular os conceitos de triângulo retângulo e círculo trigonométrico à resolução de situações-problema. Todavia, as dificuldades observadas durante o processo de ensino destacaram a necessidade de um aprofundamento no ensino das representações trigonométricas, principalmente em relação à transição entre o triângulo retângulo e a circunferência trigonométrica.

Por meio das atividades e dos questionamentos que subsidiaram a resolução dos problemas propostos, os participantes da pesquisa puderam se envolver em situações que estimularam reflexões e indagações sobre diferentes formas de resolução e sobre o desenvolvimento da argumentação na construção de conceitos da Trigonometria.

A análise das interações entre os acadêmicos e pesquisadores revelou que os conceitos de razões trigonométricas e proporções são comumente entendidos de forma isolada, sem a devida conexão com suas aplicações em contextos mais amplos, como a circunferência trigonométrica. Essa constatação reforça a importância de práticas pedagógicas que promovam a compreensão conceitual, estimulando os estudantes a raciocinar de forma crítica e aplicar os conceitos matemáticos em diferentes contextos.

Ao observar as respostas dadas pelos acadêmicos nas atividades realizadas, identificou-se a mobilização de conceitos-em-ação e teoremas-em-ação que, nas situações envolvendo a trigonometria no triângulo retângulo, eram válidos e auxiliavam os sujeitos a enfrentarem com êxito as questões propostas, mas que, no âmbito das situações relativas à trigonometria na circunferência, precisaram ser adaptados, reavaliados, recombinados e, por vezes, até descartados.

Um diagnóstico cuidadoso pelo professor dos invariantes operatórios mobilizados pelos estudantes – muitas vezes expressos de forma implícita durante suas reflexões diante de uma situação – pode contribuir significativamente para que o docente compreenda os diferentes tipos de situações que devem ser propostas em sala de aula. Essa compreensão é fundamental para que os alunos tenham oportunidades reais de construir conhecimentos conceitualmente sólidos e cientificamente válidos sobre determinado conteúdo matemático.

A análise das respostas dos acadêmicos nas atividades da sequência didática evidenciou, em algumas situações de aprendizagem, certa dificuldade na distinção entre o objeto matemático e sua representação, especialmente na mobilização de conceitos-em-ação relacionados à Trigonometria. Essa dificuldade pôde ser percebida, por exemplo, em enunciados que revelavam confusão entre a razão trigonométrica e o valor da medida do raio da circunferência.

Dois exemplos analisados anteriormente ilustram bem esse ponto: em um deles, um estudante atribuiu ao valor do seno de 90° a determinação da medida do raio da circunferência; em outro, a relação é invertida, conferindo ao raio unitário a definição do valor do seno de 90°.

Esses trechos evidenciam a mobilização de *teoremas-em-ação distintos*: no primeiro caso, o estudante considera que o valor da razão trigonométrica define a medida do raio; no segundo, entende que é a medida do raio que determina o valor da razão.

Essas interpretações revelam diferentes compreensões sobre a natureza dos objetos matemáticos envolvidos e reforçam a importância de propor situações que favoreçam a explicitação e a problematização desses invariantes operatórios.

Vergnaud (1994) orienta que é função do professor identificar quais conhecimentos os estudantes têm explicitamente e quais utilizam corretamente, mas ainda não desenvolveram de modo explícito. Além disso, recomenda que as condições de aprendizagem devem emergir das situações-problema, com o objetivo de que torná-las significativas para os estudantes. Foi nesse sentido que a Professora interveio ao questionar: *"Então você afirma que se o sen de 90° fosse 10, então o raio da circunferência trigonométrica também seria 10?"*

O trabalho com atividades como a sequência implementada pode possibilitar ao docente diagnosticar, por meio dos invariantes operatórios mobilizados pelos estudantes, aspectos conceituais que ainda demandam maior aprofundamento, mesmo que esses já devessem ter sido consolidados em etapas anteriores da formação. No caso dos sujeitos da pesquisa, observou-se a necessidade de ampliar a compreensão sobre as razões trigonométricas.

Destaca-se, assim, a importância de expor os estudantes a uma variedade de situações-problema que envolvam essas razões em contextos significativos e do cotidiano, favorecendo a construção de significados mais sólidos e a superação de concepções inadequadas.

Portanto, este estudo, além de oferecer exemplos de uma prática pedagógica no ensino superior, destaca a necessidade de explorar novas abordagens didáticas que favoreçam a aprendizagem e a construção de conceitos trigonométricos. Estudos futuros poderiam ampliar esta pesquisa, explorando outras relações trigonométricas, como secante, cossecante e cotangente e suas interações com a metodologia Resolução de Problemas.

Ressalta-se, ainda, a importância da discussão a respeito da utilização do livro didático, de modo que ele não seja percebido pelos estudantes como um repositório inquestionável de regras e fórmulas, mas como um recurso pedagógico que favoreça a construção de conhecimentos.

Defende-se que o livro didático deve apresentar situações que estimulem a participação ativa do estudante em seu processo de aprendizagem, incentivem o desenvolvimento do hábito de pensar, refletir e compreender o que está sendo proposto, garantindo, assim, uma aprendizagem satisfatória.

Referências

ABREU, A. C. **O Uso de Software na Aprendizagem da Matemática**. 2011. 37f. Monografia (Especialização) – Universidade Federal do Mato Grosso, São Paulo, 2011.

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o Computador à Resolução de Problemas Fechados:** Análise de uma Experiência. 2005. 370 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2005.

BARBOSA, C. P.; LOPES, C. E. Um estudo sobre a identidade profissional de futuros professores de Matemática no Estágio Curricular Supervisionado. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 4, n. 10, p. 1–25, 2020. https://doi.org/10.46551/emd.e202035.

BELO, Cibelli Batista; BURAK, Dionisio. A Modelagem Matemática na Educação Infantil: uma experiência vivida. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 4, n. 10, p. 1–22, 2020. https://doi.org/10.24116/emd.e202016.

D'AMBRÓSIO, B. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates**, Brasília, v. 1, n. 2, p. 15-19, 1989.

LOPES, R. **Equações Diferenciais Ordinárias de Variáveis Separáveis na Engenharia Civil**: uma abordagem contextualizada a partir de um problema de Transferência de Calor. 2021. 313f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) —Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2021.

MINAYO, M. C. S. **O desafio do conhecimento**: Pesquisa qualitativa em saúde. São Paulo: Hucitec, 2014.

MORAIS, R. S; ONUCHIC, L. R. Uma abordagem histórica da Resolução de Problemas. In: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. **Resolução de Problemas:** teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 17-34.

MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

OLIVEIRA, M. S. Dificuldades na Aprendizagem de trigonometria: reflexos da Educação

Básica no Ensino Superior. **Intermaths**, Vitória da Conquista, v. 2, n. 2, p. 140-155, 2021. https://doi.org/10.22481/intermaths.v2i2.8529.

OLIVEIRA, S. M. de; LOPES, R. O Júri Simulado como metodologia ativa no curso de Licenciatura em Matemática. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 7, n. 13, p. 1–17, 2023. https://doi.org/10.46551/emd.v7n13a13.

OLIVEIRA, S. M. de; MOTA, J. F.; LOPES, R. Aventura Matemática: oficinas como estratégia de ensino e de aprendizagem em Matemática à vista da Teoria dos Campos Conceituais. **Ensino & Pesquisa**, União da Vitória, v. 22, n. 2, p. 798-813, 2024. https://doi.org/10.33871/23594381.2024.22.2.9187.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, São Paulo, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011.

PAIVA, M. **Matemática**: conceitos, linguagem e aplicações. Volume 2. São Paulo: Moderna, 2002.

PÓLYA, G. **A Arte de resolver Problemas.** Tradução Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2006.

RAMÍREZ, M. C. **La enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de problemas.** Volume 1. Havana: Educación Cubana. 2006.

SCHROEDER, T.; LESTER, F. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (ed.). **New Directions for Elementary School Mathematics.** Reston: NCTM, 1989. p. 31-42.

SILVA, D. A. Contribuições da resolução de problemas na superação das dificuldades dos alunos com a matemática. **Anais II CONEDU**. Campina Grande: Realize Editora, 2015. Disponível em: https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/15679. Acesso em: 03 de set. 2024.

THOMPSON, A. Learning to Teach Mathematical Problem Solving: Changes in Teachers' Conceptions and Beliefs. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Ed.). **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving.** Virginia: Laurence Erlbaum Associates, 1989.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais**: a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1987.

VERGNAUD, G. Quelques problèmes theóriques de la didactique a propos d'un example: les structures additives. Atelier International d'Eté: Récherche en Didactique de la Physique. **La Londe les Maures**, França, jun./jul. 1983.

VERGNAUD, G. A teoria dos campos conceituais. In: BRUN, J. **Didactica das**

matematicas. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 155-191.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**. Curitiba: UFPR, 2009.

ZABALA, A. **A Prática Educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.