

Um olhar para o conceito de modelos matemáticos na modelagem

DOI: <https://doi.org/10.33871/rpem.2026.15.36.10290>

Ailson Lopes Alzeri¹
Ana Paula dos Santos Malheiros²

Resumo: Este artigo tem como objetivo discutir o conceito de modelos matemáticos no campo da Modelagem Matemática. Metodologicamente, trata-se de uma pesquisa de natureza qualitativa, baseada em uma abordagem teórica e reflexiva, sustentada por revisão bibliográfica e discussão crítica. Para isso, fundamenta-se nos referenciais teóricos de Paulo Freire, Ubiratan D'Ambrosio e Ole Skovsmose, apresentando inicialmente uma visão geral sobre esses modelos para, em seguida, analisá-los no contexto da Modelagem Matemática. Entre as questões destacadas, ressalta-se a inadequação da transferência direta do conceito de modelos do campo da Matemática Pura ou Aplicada para o campo da Educação Matemática, bem como a necessidade de uma conceituação mais precisa desses modelos nesse contexto. Conclui-se que, no âmbito da Modelagem Matemática, os modelos requerem uma abordagem analítica e crítica aprofundada, que contemple não apenas os aspectos matemáticos intrínsecos a eles, mas também as dimensões éticas e sociais relacionadas à realidade para a qual são projetados.

Palavras-chave: Educação Matemática; Modelos. Criticidade.

A look at the concept of mathematical models in modeling

Abstract: This article aims to discuss the concept of mathematical models in the field of Mathematical Modeling. Methodologically, it is a qualitative research study based on a theoretical and reflective approach, supported by a bibliographic review and critical discussion. To this end, it is grounded in the theoretical frameworks of Paulo Freire, Ubiratan D'Ambrosio, and Ole Skovsmose, initially presenting an overview of these models and then analyzing them within the context of Mathematical Modeling. Among the highlighted issues, the study emphasizes the inadequacy of directly transferring the concept of models from the field of Pure or Applied Mathematics to Mathematics Education, as well as the need for a more precise conceptualization of these models in this context. The conclusion is that, within the field of Mathematical Modeling, models require a deep analytical and critical approach that considers not only the mathematical aspects intrinsic to them but also the ethical and social dimensions related to the reality for which they are designed.

Keywords: Mathematics Education; Models; Criticality.

1 Introdução

Ao considerarmos a Educação Matemática como um campo de pesquisa e atuação profissional no Brasil, com mais de quatro décadas de desenvolvimento em diversas áreas que permeiam o ensino e a aprendizagem de Matemática no país (Fiorentini; Lorenzato, 2012), observamos que os modelos matemáticos têm sido recorrentemente abordados nesse contexto.

¹ Doutor em Educação Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE. E-mail: ailsonalzeri@gmail.com - OCID: <https://orcid.org/0000-0001-9840-3235>.

² Doutora em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - Unesp. E-mail: paula.malheiros@unesp.br - OCID: <https://orcid.org/0000-0002-1140-4014>.

Esses modelos estão principalmente vinculados a campos como a Educação Matemática Crítica, Etnomatemática, Tecnologias Digitais e a própria Modelagem Matemática.

Diante dessa posição ocupada pelos modelos matemáticos, consideramos essencial a realização de pesquisas que promovam reflexões mais aprofundadas sobre como eles são compreendidos e articulados no âmbito do referido campo de pesquisa e, em especial, na Modelagem Matemática. Nesse sentido, este artigo tem como objetivo, à luz de referenciais teóricos como Paulo Freire, Ubiratan D'Ambrosio e Ole Skovsmose, discutir o conceito desses modelos na Modelagem Matemática.

Esse objetivo nos leva a refletir, por exemplo, sobre questões pertinentes ao próprio processo de modelagem e sua relação com a produção de modelos. Podemos ponderar, tomando como pressuposto que, geralmente, a existência de um modelo matemático pressupõe que houve um processo de Modelagem Matemática que lhe deu origem se a recíproca dessa afirmação também seria verdadeira. Ou seja, faz sentido, no âmbito da Educação Matemática, afirmar que o desenvolvimento de um trabalho de Modelagem³ tem sempre como objetivo e possível resultado a obtenção de um modelo?

Nos campos convencionados como Matemática Pura ou Aplicada, é mais comum que autores como Nogueira, Martins e Brenzikofer (2008), Nagle, Saff e Snider (2012) e Stewart (2006), entre outros, percebam a Modelagem como um processo cujo objetivo principal é obter uma representação ou explicação para determinado aspecto da realidade, expresso na forma de um modelo. Nesse sentido, o sucesso ou fracasso da Modelagem está vinculado mais diretamente à obtenção de um modelo formal e ao quanto esse modelo é eficaz em responder ao problema inicialmente proposto.

O mesmo raciocínio, contudo, não é facilmente observado quando voltamos nossa atenção para os modelos matemáticos na Educação Matemática, que envolvem percepções variadas, especialmente atreladas à Modelagem. De fato, para alguns autores reconhecidos da área, como Jonei Barbosa e Dionisio Burak, a construção do modelo não pode ser vista como prioridade no desenvolvimento atividades de Modelagem Matemática (Sousa; Lara; Ramos, 2018).

Reflexões e indagações que envolvem os modelos matemáticos, como as mencionadas anteriormente, apresentam, nesse contexto, um maior grau de complexidade e requerem um aprofundamento teórico e reflexivo. Nesse sentido, faremos, a seguir, uma discussão do tema organizada em dois blocos: o primeiro versa sobre aspectos conceituais dos modelos

³ Neste artigo, Modelagem e Modelagem Matemática serão utilizados como sinônimos, com intuito de evitar repetições ao longo do texto.

matemáticos em geral, e o segundo trata das percepções e reflexões sobre a temática, mais especificamente atrelada a Modelagem no campo da Educação Matemática.

2 Os Modelos Matemáticos

O termo *modelo* é geralmente utilizado para caracterizar alguém ou alguma coisa que serve de inspiração e que pode ser tomado como referência, para ser copiado ou imitado (Japiassú; Marcondes, 2001). Esse termo é, no entanto, usado de maneira diversa e pode, a depender do contexto, assumir diferentes significados na língua portuguesa. Neste trabalho, atemo-nos aos modelos conceituados como científicos e, mais especificamente, aos modelos matemáticos.

A origem etimológica da palavra *modelo* vem do termo em latim *modulus*, que significa uma determinada medida arbitrária utilizada para obter a proporção entre as partes de uma obra de arquitetura. Com o passar do tempo, esse termo sofreu mudanças e apareceu em diferentes línguas, com distintos significados, por exemplo, durante a Idade Média no francês, na forma de *moule* (molde), no inglês como *mould* e no alemão como *modl*. No “período Renascentista Italiano, entre os séculos XIV e XVI, *modello*, que em francês tornava-se *modèle*, em inglês *model* e em alemão *modell*” (Silva; Catelli, 2019).

Embora não seja nossa pretensão, neste trabalho, traçar uma etimologia detalhada para a origem e constituição dos modelos em sua conotação científica, ao olharmos para as diversas transformações pelas quais esse conceito tem historicamente passado, podemos trazer algumas considerações pertinentes a ele. Para tanto, podemos aludir ao pensamento de Ubiratan D’Ambrósio que, inspirado pela entrevista que realizou com Paulo Freire (Freire, 1996), traz sua visão de como, mais amplamente, constitui-se o conhecimento humano e, mais especificamente, o conhecimento científico.

Para D’Ambrosio (2011; 2013), a espécie humana, assim como outras espécies de animais, é movida por pulsões de sobrevivência, com o objetivo de satisfazer necessidades fisiológicas e desenvolver meios para melhor sobreviver e lidar com o ambiente. Para o autor, o diferencial da nossa espécie, no entanto, é que também somos dotados da capacidade de transcender o imediato, buscando explicações, os porquês dos fatos e fenômenos, assim como produzir meios e sistemas de explicação. Assim, a espécie humana é dotada tanto de pulsões de sobrevivência quanto de transcendência.

Dessa forma, na busca pela transcendência, como seres da cultura que somos, desenvolvemos meios para explicar fatos, fenômenos ou aspectos da realidade, seguindo um

encadeamento inerente à nossa espécie, com a capacidade de interligar presente, passado e futuro. De fato, ao “procurar no passado, explicações e causas para o presente, busca-se antecipar o futuro” (D’Ambrosio, 2013, p. 15).

Esse movimento transcendente não acontece em um vácuo imaginário ou de maneira igual para todos os povos, ele é fruto de um tempo e também de um espaço. Aliás, para Freire (1996), foi a nossa presença no mundo que gerou indiscutivelmente esse mundo. Quando o suporte que mulheres e homens viviam passou a ser visto como mundo e a vida se fez existência, começaram a se instalar a história, a cultura e a linguagem, com suas possibilidades de interlocução, momento em que também surge a Matemática.

Vemos, assim, a origem dos modelos atrelada a essa busca por respostas às questões de existência e transcendência da humanidade, em um tempo e espaço, como formas de explicação presente em nossa cultura ocidental. De fato, podemos perceber que, se inicialmente a noção de modelo era utilizada por artesãos, pedreiros e arquitetos (Silva; Catelli, 2019), com o passar do tempo foi se transformando, atrelada à maneira como mulheres e homens buscavam montar sistemas de explicações para indagações de ordem natural, social ou espiritual. Os modelos são, nesse sentido, inerentes a essas explicações que perfazem a base para o surgimento de grandes áreas de conhecimento, como a filosofia, religião e a própria ciência moderna, conforme nos lembram Biembengut e Hein (2013).

Ressaltamos que o sentido dado aos modelos – em sua conotação científica – ganhou força e se destacou em nosso contexto somente a partir da metade do século XX, após a Segunda Guerra Mundial. Evidenciaram-se, nessa época, fatores como a disputa científica no contexto da Guerra Fria, assim como o surgimento e a expansão da computação, fatores esses que propiciaram um ambiente favorável para a valorização da modelagem e da simulação, especialmente atreladas à Matemática Aplicada. A Matemática emerge, assim, como uma expressão da cultura humana mais consistente e almejada para as projeções e explicações naquele momento. Ou, ainda, podemos afirmar que é nesse período da história das ciências que a noção de modelos matemáticos⁴ ganhou uma relevância inédita (Roque, 2021).

A partir do final da década de 1970 e início da década de 1980, a Modelagem Matemática surge e começa a ser reconhecida também como uma das principais áreas que compõe a Educação Matemática no Brasil (Meyer; Caldeira; Malheiros, 2017). Os modelos, que inicialmente estavam mais ligados à Modelagem no âmbito da Matemática Aplicada,

⁴ Objetivando evitar repetições, daqui em diante designaremos os modelos matemáticos apenas como modelos.

passaram também a ocupar espaço nas discussões nesse novo campo de pesquisa e atuação profissional.

Diante dessa expansão e da presença dos modelos em distintos campos de conhecimento, eles passaram também a contar com uma diversidade de percepções e formas de concebê-los. Algumas dessas formas mantiveram estreita relação com a aplicação da Matemática de maneira mais direta, como conceituam Nogueira, Martins e Brenzikofer (2008, p.17):

Dizemos que M é um *modelo matemático* ($m.m$) de S e de S_0 ⁵, se existe uma aplicação injetiva $m: S \rightarrow M$ que leve injetivamente cada componente de S num elemento de M e cada interdependência de S numa relação de M , preservando todas. Esta aplicação $m: S \rightarrow M$ é então dita uma *representação* (matemática), uma modelagem (matemática) ou uma matematização de S e de S_0 .

Nesse caso, os autores buscam uma formalização do conceito com o uso de expressões da própria Matemática. Já Bassanezi (2014, p. 20) se aproxima também de uma percepção análoga dos modelos, que são descritos como um “conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado”.

Ademais, temos autores que concebem os modelos de maneira diversa, vistos, por exemplo, como aqueles que “empregam símbolos matemáticos, sejam tabelas, gráficos, equações, inequações, etc., ou, em outras palavras, empregam conceitos, notações e/ou procedimentos matemáticos” (Barbosa, 2009, p. 70-71). Já O’Neil (2020, p. 35) os conceitua como uma reflexão “de objetivos e ideologias. [...] são opiniões embutidas de matemática”. Ou ainda, como descrevem Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 13), os modelos podem ser percebidos como uma “representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam. Sua formalização, todavia, não tem um fim em si só, mas visa fomentar a solução de algum problema”.

Podemos, assim, encontrar distintas concepções de modelos que perfazem uma literatura extensa e com diversas variações, a depender dos objetivos, referências, campo de pesquisa e atuação das(os) pesquisadoras(es)⁶. Um traço comum a essas diversas concepções é o fato de os modelos apresentarem como uma característica central o fato de serem apenas uma

⁵ Em que S_0 é uma situação inicial dada, real ou simulada, constituída por componentes e interdependências. Já S é uma situação simplificada, após a seleção dos componentes e interdependências consideradas mais relevantes.

⁶ Algumas outras formas de conceituar modelos podem ser encontradas em trabalhos desenvolvidos por autoras e autores como: Kosik (1976), Muller (1986), Stewart (2006), Javaroni (2007), Hestenes (2010), Bean (2012), Dalla Vecchia (2012), Niss (2012), Biembengut e Hein (2013), D’Ambrosio (2015) e Roque (2021).

expressão aproximada de aspectos da realidade. Como vimos, essa é uma característica inerente à própria constituição da definição de modelos que, quando relacionada a aspectos da realidade, torna improvável a pretensão de compreendê-la em sua totalidade.

Mesmo os traços mais comuns entre as diferentes concepções de modelo, podem, ainda assim, assumir diferentes contornos. Podemos mencionar, por exemplo, o caso de quando eles são articulados pela teoria da representação da linguagem (Wittgenstein, 1992). Essa perspectiva tem, segundo Skovsmose (2007), a característica central de avaliar os modelos como bons ou ruins, a depender de quanto matematicamente eles se ajustam na representação de um fenômeno empírico.

Dentro da teoria da representação da linguagem, é possível fazer deduções matemáticas no âmbito do próprio modelo para ajustá-lo, como se ele fosse parte da Matemática Pura. Cabe, nesse sentido, no processo de Modelagem, apenas encontrar as melhores “*ferramentas matemáticas*”, a fim de produzir um modelo que melhor se adeque aos objetivos almejados. O único problema passa a ser de ordem técnica, relacionado ao ajuste do modelo ao aspecto da realidade estudado (Skovsmose, 2007).

Embora com inegável clareza epistemológica, é necessário perceber que os modelos, quando percebidos e articulados por uma teoria como a da representação, deixam de evidenciar outros importantes aspectos a serem considerados. Podem, inclusive, estabelecer uma aplicação da Matemática separada das questões sociais, alheia aos fatores socioculturais nos quais os modelos foram projetados e postos em ação.

Essas questões de natureza social, cultural e crítica ganham importância expressiva quando direcionamos nosso olhar para o campo dedicado ao ensino e à aprendizagem de Matemática, ou seja, quando passamos a conceber os modelos em Modelagem desenvolvida no campo da Educação Matemática, conforme passamos a discutir melhor na seção seguinte.

3 Modelos no Contexto da Modelagem Matemática

A Educação Matemática, da forma como a compreendemos, envolve, além de esforços para criar situações de ensino e aprendizagem exitosas, também uma série de outros aspectos interligados no pensar e no fazer educacional. São fatores como o conceito de Matemática, a concepção dos processos de ensino e de aprendizagem, a criticidade, entre outros temas que podem influenciar diretamente a maneira como a professora ou o professor desenvolve suas atividades em sala de aula.

Diante dessas características, é essencial compreender que a tentativa de replicar, na

Educação Matemática, conceitos oriundos de outras áreas, como os da Matemática Pura e Aplicada, tende a enfrentar dificuldades ou a se mostrar ineficaz, por maior que seja a proximidade entre esses campos de conhecimento. Os modelos podem ser apontados como um desses conceitos que demandam nossa especial atenção.

De fato, essa não replicação de conceitos em distintas áreas encontra respaldo teórico em diferentes linhas de pesquisa associadas ao ensino de Matemática. Se tomarmos como exemplo a perspectiva teórica da etnomatemática no Brasil, Knijnik e Silva (2008) ressaltam que as matemáticas e suas expressões podem ser ressignificadas como conjuntos de jogos de linguagem, associados as distintas formas de vidas, pertencentes às culturas nas quais são criadas. Em decorrência, segundo esse ponto de vista, as matemáticas e os modelos, por sua vez, não possuem uma essência invariável que os mantenha totalmente isolados, tampouco, podemos identificar uma propriedade comum e imutável a eles, mas apenas algumas semelhanças de família.

Já sob um ponto de vista epistemologicamente distinto, podemos apontar pressupostos defendidos no âmbito da Didática da Matemática de origem francesa. Encontramos, por exemplo, na teoria da transposição didática, desenvolvida por Chevallard (1991), o alerta para uma necessária vigilância no tocante ao deslocamento de uma teoria de uma área originária do saber para outra. Segundo o referido autor, esse alerta é necessário, pois uma adaptação desse tipo, além de tornar a teoria estéril para um outro campo de conhecimento, pode também causar uma generalização precipitada. Nesse sentido, conforme observa Pais (2015), não se deve incorrer no erro de, em determinadas situações, distorcer uma análise de cunho filosófico para outra de cunho matemático, como no caso de explicar o que é número por argumentos puramente matemáticos.

Qualquer uma das vertentes teóricas mencionadas anteriormente evidencia o equívoco potencial de conceituar os modelos em Educação Matemática como uma mera transferência do campo da Matemática Pura e/ou aplicada. Essas questões apontam para a necessidade de uma análise mais aprofundada dos elementos que fundamentem a compreensão dos modelos no próprio âmbito da Educação Matemática.

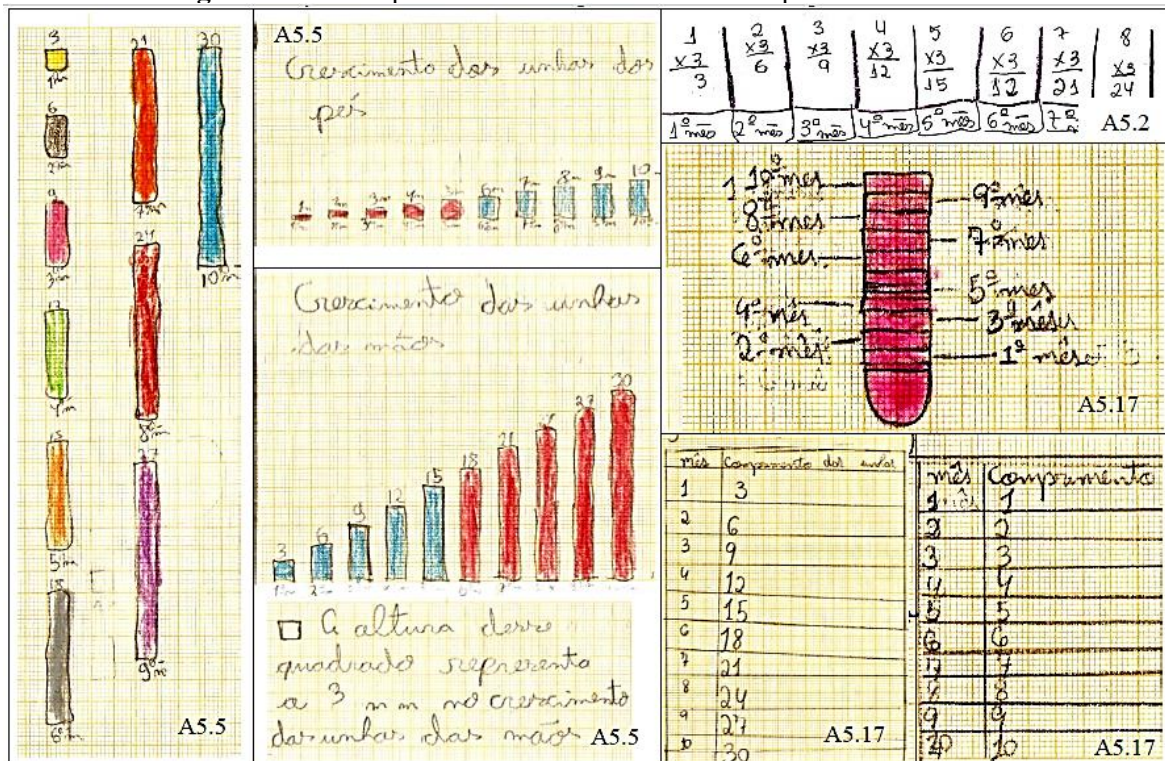
Como já mencionamos, a Modelagem Matemática se destaca nesse contexto sob distintos pontos de vista e se caracteriza principalmente pela busca de respostas, pela ênfase no processo e nas descobertas. Ela pode ser entendida como uma abordagem pedagógica que contribui para a produção do conhecimento matemático, além de possibilitar a interação com outras áreas do conhecimento, devido ao seu caráter interdisciplinar. De maneira geral, a partir de observações da realidade (do estudante e/ou do professor) e partindo de questionamentos,

discussões e investigações, os estudantes se deparam com problemas que podem modificar a forma como as ações na sala de aula acontecem, além da forma como se compreende o mundo (Meyer; Caldeira; Malheiros, 2013).

Podemos perceber no desenvolvimento de atividades de Modelagem, mesmo nos casos em que não é explícito o objetivo em se chegar a um modelo como resultado final, que essas atividades não deixam de adotar procedimentos na busca pela descoberta do problema inicial e em expressar seus resultados de maneira matematicamente organizada. A presença ou não de modelos ao final de um processo de Modelagem vai depender naturalmente do conceito de modelo que se toma como referência.

Na literatura, encontramos diversos trabalhos de Modelagem que envolvem a apresentação de modelos sem que estejam necessariamente associados às tradicionais fórmulas matemáticas. Um exemplo disso pode ser observado nas atividades desenvolvidas nas séries iniciais do Ensino Fundamental, apresentadas na pesquisa de doutorado de Tortola (2016). Nessas atividades, é possível identificar modelos representados de diferentes formas, conforme a Figura 1:

Figura 1: Modelo para crescimento das unhas feito pelos alunos do 5º ano



Fonte: Tortola (2016, p. 133).

O problema inicial que foi proposto às educandas e aos educandos consistia em calcular

o crescimento gradual das unhas dos pés e mãos. Para a produção dos modelos, tomados como uma expressão matemática desse problema proposto, as educandas e educandos articulam conteúdos matemáticos como adição, multiplicação, tabelas e gráficos.

Como é possível observar, as(os) participantes expressaram matematicamente suas conclusões por meio do gráfico de barras, desenho, tabelas e anotações. Segundo Tortola (2016), mesmo que os modelos produzidos pelas turmas de 1º, 2º e 3º ano, não apresentem a mesma abrangência matemática quanto os de 4º e 5º anos, isso não significa que não produziram modelos, ou que esses modelos sejam inferiores, mas que ao contrário, são tão sofisticados quanto, levando em consideração a explicação, capacidade de mostrar relações e prever novos resultados.

A forma como percebemos os modelos pode influenciar diretamente na forma como a própria Modelagem é concebida na Educação Matemática. Essa relação decorre do fato de que, quando os modelos assumem uma conceituação mais ampla, conforme exemplificamos anteriormente, eles também podem ocupar uma posição de destaque no processo de Modelagem, mesmo quando esse processo não os considera como o objetivo principal.

De fato, se adotarmos um conceito de modelo estritamente ligado as fórmulas matemáticas, muitos trabalhos desenvolvidos por autores no campo da Educação Matemática, como aqueles que não veem a construção de modelos um fator principal em atividades de Modelagem (Sousa; Lara; Ramos, 2018), não expressariam nenhuma proximidade entre a Modelagem e os modelos. Essa situação pode ainda trazer certas dificuldades epistemológicas para esses pesquisadores, pois fazer modelagem sem modelo, dentro de uma lógica restrita, seria o mesmo que fazer bananada sem bananas.

Nesse sentido, vemos que essa reflexão sobre os modelos na Modelagem Matemática, ultrapassa ao ato de melhor percebê-los como objeto do conhecimento em si mesmos, mas lança olhares também sobre ao próprio processo de desenvolvimento da modelagem. Como bem afirma a historiadora da matemática Tatiana Roque, é necessário que no processo de ensino e aprendizagem fique claro que os “modelos não são fórmulas” (Roque, 2021, p. 258).

Conforme defendemos, é importante que haja essa reflexão sobre os modelos relacionados ao desenvolvimento do processo de Modelagem, sobretudo por ser essa uma área de pesquisa reconhecida e bem consolidada. Podemos, entretanto, também redimensionar nosso olhar para pensar os modelos independentemente desse processo, ou seja, em experiências desenvolvidas com modelos já prontos.

De fato, embora o trabalho com modelos prontos ainda não esteja amplamente disseminado na Educação Matemática, autores reconhecidos internacionalmente na área da

Modelagem, como Blomhøj e Niss (2021), defendem que o desenvolvimento de estudos e pesquisas com esses modelos constitui uma importante competência, que ainda é pouco utilizada no campo da Educação Matemática.

No Brasil, as pesquisas com modelos prontos não são recentes. Cabe lembrar que já foram desenvolvidas em nível de doutoramento por autores como Javaroni (2007), Soares (2012) e Sousa (2019). Enquanto as duas primeiras autoras foram pioneiras na análise de modelos direcionada ao ensino de Matemática, com o desenvolvimento de trabalhos realizados com participantes de turmas do ensino superior, a última se inspirou também no trabalho delas, para propor atividades no ensino médio, mais especificamente uma proposta de metodologia da análise de modelos como forma de ensino ligada ao currículo escolar.

Embora esses trabalhos tenham reconhecida importância na temática envolvendo os modelos prontos no campo da Educação Matemática, quando direcionamos nosso olhar sob uma perspectiva crítica, inspirados em autores como Ole Skovsmose e Paulo Freire, podemos trazer para essa discussão outros importantes aspectos que não estão presentes nessas produções. Nesse caso, podemos tomar como referência a pesquisa de doutorado do primeiro autor deste artigo (Alzeri, 2024), na qual foi realizado um estudo com modelos que teve como participantes educandas e educandos do ensino médio, por meio de um trabalho inspirado nos temas geradores, conforme a maneira como esses temas foram desenvolvidos por Freire (2019). De fato, Freire (2019, p. 134) é enfático ao afirmar que a investigação temática acontece por meio de uma metodologia conscientizadora que, “além de nos possibilitar sua apreensão, insere ou começa a inserir os homens numa forma crítica de pensarem seu mundo”.

Defendemos, nesse contexto, que, para vislumbrar os modelos prontos sob uma perspectiva crítica, faz-se necessário um olhar para eles ensejado pelo diálogo com as educandas e educandos. Para tanto, esses modelos devem estar presentes no mundo e com o mundo dessas(es) participantes e ser significativos para elas e eles.

Na referida pesquisa, os modelos emergiram a partir de atividades realizadas com as(os) participantes em fases ou etapas inter-relacionadas. Ao longo dessas etapas, o estudo possibilitou o desenvolvimento de um trabalho com os modelos, que os colocou no centro de uma discussão ampla, ligada à realidade das educandas e dos educandos. De fato, conforme defende Freire (2021), é a curiosidade sobre o mundo um inquestionável fator necessário para a superação de uma visão ingênua e um caminho para a criticidade.

Vemos, assim, ser essencial, no contexto educacional, adotar uma visão crítica sobre a forma como a Matemática — ou, especificamente, os modelos — interagem e se manifestam em nossa realidade. Essa perspectiva envolve um olhar atento para nosso próprio mundo, no

qual mulheres e homens são agentes construtores, numa indissociabilidade entre ação e reflexão, conforme proposto por Freire (2019).

Se, por um lado, essa forma de proceder pode nos revelar maravilhas implementadas nas últimas décadas, por exemplo, os avanços em meios de transporte e comunicação cada vez mais rápidos e eficazes, as curas para muitas doenças e outros benefícios, por outro lado, emergimos em um contexto marcado por vasta destruição e perda de vidas, devido a guerras, novas epidemias e desastres ambientais sem precedentes no século XXI. Como já nos alertou D'Ambrosio (1994), a maioria das maravilhas ou horrores implementados pelas ciências e tecnologias tem relação direta com o avanço da Matemática. Observamos, ainda, que esse avanço é impulsionado pelos modelos, por meio dos quais a Matemática consolidou sua importância no meio científico, especialmente a partir da segunda metade do século XX, como apontamos anteriormente.

Nesse sentido, estudar e conceber modelos em Educação Matemática requer um aprofundamento analítico e crítico que vai além da Matemática intrínseca a eles. Esse estudo envolve questões éticas e sociais ligadas à realidade de alunas, alunos e professoras(es) e pode ser desafiador tanto para educandas(os) quanto para a educadora(o).

A professora ou o professor pode, por exemplo, se deparar com, ou trazer para as aulas, reflexões sobre casos como o alerta dado pelo Conselho de Segurança da Organização das Nações Unidas (ONU) em 2021, que tratou das evidências de um ataque realizado por um drone de forma autônoma. Nesse caso, o equipamento, operado por inteligência artificial, escolheu o alvo sem intervenção humana imediata (ONU, 2021).

O referido acontecimento foi noticiado em 3 de junho de 2021 pela revista eletrônica *The New York Times*, com base em um relatório de especialistas apresentado em forma de painel no Conselho de Segurança da ONU. A matéria destacou o possível primeiro ataque de uma máquina a seres humanos sem orientação humana imediata (Cramer, 2021). O relatório final dos peritos da ONU sobre a situação na Líbia apontou diversas violações das leis internacionais de direitos humanos. Segundo o painel, as violações são extensas, incluindo o uso experimental de armamentos como o sistema letal de armas autônomas, o drone Kargu-2 (ONU, 2021).

Esse drone foi produzido pela empresa de defesa turca STM e utilizado para perseguir e atacar inimigos do governo central sediado em Trípoli, Líbia. O relatório não especifica o número de vítimas nem o grau de autonomia com que a máquina operou. O fato é que países têm investido e utilizado, de maneira crescente, armamentos desse tipo: equipamentos com sistemas de decisão autônoma ou, simplesmente, Inteligência Artificial (IA).

Devemos lembrar o peso que acontecimentos desse tipo têm no contexto atual, marcado

pela rápida incorporação da IA no cotidiano de grande parte dos seres humanos. Além disso, os recentes conflitos armados que se espalham pelo planeta evidenciam o uso de drones como uma forma cada vez mais comum de ataque aos inimigos.

Trabalhos que envolvem reflexões sobre casos como esses representam uma maneira promissora para o estudo com modelos em Educação Matemática. De acordo com Deisenroth, Faisal e Ong (2020), para quem deseja aprender sobre *machine learning* — um dos ramos mais atuais da inteligência artificial — é essencial ter conhecimentos não apenas de linguagem de programação, ferramentas de análise de dados e estruturas computacionais, mas também de Matemática e Estatística, compreendendo como o *machine learning* se fundamenta nesses conhecimentos.

É importante também compreender que essas máquinas tomam suas decisões baseadas em um processo de Modelagem, com modelos previamente estabelecidos por seres humanos. Áreas da Matemática e da Estatística, como análise de regressão, conseguem potencializar tais modelos, de modo que eles não apenas leiam os dados, mas também tenham a capacidade de interpretá-los de formas ainda não vistas. Ou seja, dos cruzamentos e generalizações dessas informações, pode se chegar a uma decisão futura. Essas decisões são tomadas por intermédio da identificação de padrões e estruturas nos dados, o que pode ser entendido como uma forma de aprendizagem. Assim, é possível dizer que:

Um modelo é normalmente usado para descrever um processo de geração de dados, semelhante ao conjunto de dados já disponíveis. Portanto, bons modelos também podem ser pensados como versões simplificadas do processo real (desconhecido) de geração de dados, capturando aspectos relevantes para a modelagem dos dados e extrair deles padrões ocultos (Deisenroth; Faisal; Ong, 2020, p. 12, tradução nossa).

A quantidade de dados captados e processados por um sistema autônomo, como o de um drone que sobrevoa uma região, pode ser imensa. No entanto, constituir um modelo que, a partir de dados pré-existentes, seja capaz de selecionar novas entradas dados e não confundir um soldado em meio a uma plantação com um agricultor com uma enxada, é um dos principais desafios.

No caso de ataques realizados por armas autônomas, a situação pode ser ainda mais preocupante, pois as possíveis vítimas ou seus familiares, em um contexto de guerra, têm poucas ou nenhuma chance de reclamar seus direitos. Além disso, surge um vácuo ético: no caso de um eventual erro, quem seria responsabilizado? A máquina que, de maneira autônoma, tomou a decisão e executou o ataque? Ou os seres humanos que a projetaram? Em um contexto

em que Matemática é vista como infalível, com técnicas e linguagens pouco acessíveis, modelos opacos e sistemas ainda pouco discutidos, raramente cabe o termo *erro*, e tudo acaba, normalmente, sendo visto como “danos colaterais”.

Vários outros fatores de risco podem ser identificados, quando modelos atuantes em nossa realidade são estudados sob uma perspectiva crítica. Podemos, mais uma vez, a título de exemplo, apontar o problema das *proxies*, salientado por O’Neil (2020). Esse problema tem origem quando, frente à impossibilidade de usar como input do modelo dados específicos como etnia de um determinado grupo de pessoas, os cientistas da programação de dados adotam modelos com dados menos invasivos, etnicamente mais aceitáveis, como o CEP da residência de uma pessoa. Nesse sentido, ocorre um deslocamento da questão de como uma pessoa de uma determinada região, parecida com o público que se quer modelar, com o próprio público. Naturalmente, um modelo alimentado e treinado com esses dados pode apontar caminhos que prejudicam pessoas agrupadas em um mesmo pacote. Nesse caso, como bem lembra a autora, o provérbio “diga com quem andas, e eu te direi quem tu és” aplica-se muito bem. “E os prejudicados são vistos apenas como “danos colaterais”. Todo esse sistema obscuro opera em distantes fazendas de servidores, os prejudicados raramente descobrem isso” (O’Neil, 2020, p. 228).

Destacamos, ainda, especialmente quando associados às tecnologias digitais, que os modelos tendem a surgir de maneira cada vez mais opaca, com difícil percepção de como atuam em nossa realidade (O’Neil, 2020). Em casos de sistemas informatizados, por exemplo, quando algum prejuízo ou problema afeta um usuário, é comum que a resposta dada seja simplesmente que *a culpa é do sistema*. Dessa forma, ignora-se que o modelo subjacente a esses sistemas não é neutro, sendo resultado de escolhas realizadas durante o processo de sua constituição.

Nessa discussão que envolve modelos prontos no âmbito da Educação Matemática, vistos sob uma perspectiva crítica, podemos também destacar um traço marcante da maneira como percebê-los. Ou seja, além de outras funções, os modelos quando postos em ação no meio para o qual foram projetados, também desempenham uma função prescritiva.

Em termos gerais, os modelos podem desempenhar funções *descritivas*, *preditivas* e *prescritivas*. Segundo Davis e Hersh (1988), essas funções são desempenhadas pela própria Matemática quando é aplicada. No caso dos modelos, as duas primeiras funções são as mais comumente associadas a eles em diversas circunstâncias, seja na descrição matemática de um determinado aspecto da realidade ou na previsão de eventos e fenômenos naturais.

A função *prescritiva*, por sua vez, refere-se a situações em que o modelo induz a tomada de decisões e ações humanas. Conforme Skovsmose (2007), quando um modelo é posto em

ação, ele não apenas descreve ou prediz determinados aspectos da realidade, mas também a influência, realizando uma intervenção sobre ela. Essa função está associada a um poder formatador da Matemática (Skovsmose, 2013).

Analisar a função *prescritiva* de um determinado modelo sobre a realidade, requer um maior aprofundamento na temática relacionada a ele e senso crítico. Além dos aspectos matemáticos que o compõem, é necessário um olhar crítico que leve em consideração também as dimensões éticas e sociais envolvidas. Essas dimensões demandam atenção especial, sobretudo quando o campo de atuação profissional e de pesquisa é a Educação Matemática (Skovsmose, 2023).

Nesse sentido, na busca por desenvolver uma compreensão para os modelos mais alinhada à Educação Matemática e a uma perspectiva crítica, concebemos os modelos como uma expressão humana, matematicamente organizada, de fenômenos, coisas ou aspectos da realidade. Esses modelos, assim percebidos, são também compostos pelas intencionalidades de quem os produz, de acordo com os objetivos almejados, repletos de escolhas, inseridos em um tempo e espaço nos quais são constituídos.

É verdade que nem todos os modelos são normalmente percebidos sob essa perspectiva, a exemplo daqueles criados e aplicados no âmbito da Matemática Pura, que encontram respaldo imediato dentro da própria Matemática. No entanto, como já frisamos e defendemos, esse não é o caso quando os modelos são objetos de estudo no campo da Educação Matemática.

Ao comungarmos da percepção de que a Matemática, quando posta em ação em nossa sociedade, pode levar a entendimentos, ações e consequências maravilhosas ou horríveis (D'Ambrosio, 1994; Skovsmose, 2007), compreendemos, de forma análoga, que os modelos – concebidos como expressões humanamente constituídas, matematizadas e atuantes nessa sociedade – podem também resultar tanto em maravilhas quanto em horrores. Vemos, assim, que no contexto da Educação Matemática, esses modelos requerem atenção, reflexão e criticidade.

4 Considerações Finais

Nos últimos anos, temos presenciado a intensificação de eventos que ocasionam mudanças significativas em como nos comportamos, agimos e estruturamos nossas vidas. Entre esses eventos, evidenciamos a epidemia causada pelo vírus da Covid-19 que provocou a morte de uma parte significativa da população em diversos países ao redor do mundo. Vale lembrar que, em países como o Brasil, durante grande parte dessa crise epidemiológica, nossas ações

foram orientadas por um modelo que utilizava a média móvel do número de casos e de mortes, determinando, assim, maior ou melhor flexibilidade nas medidas de isolamento social.

Não obstante, conforme já mencionamos, a IA tem se popularizado rapidamente, apresentando uma diversidade de aplicações e usos em nosso cotidiano. Seja para buscar informações, auxiliar professoras e professores no planejamento e execução de aulas ou mesmo para escrever artigos semelhantes a este, essas inteligências estão se disseminando amplamente. Nesse contexto, compreender melhor a base do processo e modelos associados a elas, destaca-se como algo importante e urgente.

Quando focamos na sala de aula, espaço privilegiado para a possível transformação humana, percebemos que a Educação Matemática não pode estar alheia a essas discussões. Para isso, é necessário que os estudos com modelos avancem além das fórmulas e das operacionalizações matemáticas, envolvendo também reflexões e criticidade sobre como os modelos são construídos, para quê, com quais objetivos e quais as possíveis intervenções decorrentes de seu uso.

A partir de referenciais como Paulo Freire, Ubiratan D'Ambrosio e Ole Skovsmose, compreendemos que esses modelos podem ser instrumentos de reflexão, diálogo e aprendizagem em sala de aula. Nesse sentido, um estudo com modelos permite reconhecer sua dupla natureza: ao mesmo tempo que possibilita a compreensão da Matemática utilizada para expressar fenômenos e acontecimentos diversos, também revela a possível intervenção do modelo na realidade, influenciando em compreensões e ações.

Compreendemos e reafirmamos o compromisso da Educação Matemática em promover um ensino que vá além da mera instrumentalização técnica, incentivando uma postura ativa dos seres humanos como conhecedores e transformadores do mundo, atrelado ao papel da matemática nessas mudanças. Assim, é fundamental que educadoras e educadores de Matemática promovam reflexões críticas sobre esses modelos e, junto com as(os) estudantes, investiguem mais profundamente suas estruturas e os pressupostos muitas vezes implícitos.

Esperamos, com este artigo, colaborar para a compreensão dos modelos sob o foco de particularidades próprias do campo da Modelagem Matemática, assim como, contribuir para o fortalecimento de práticas pedagógicas que integrem uma perspectiva crítica sobre a forma de conceber a construção e utilização desses modelos. Almejamos ainda que as reflexões aqui apresentadas sirvam como um convite para que novas pesquisas e práticas sejam desenvolvidas, consolidando a importância dos modelos como ferramentas de compreensão, diálogo, reflexão e transformação da Educação Matemática.

Referências

ALMEIDA, L M. W. de; SILVA, K. P. da; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALZERI, A. L. **Estudo com modelos matemáticos realizado sob uma perspectiva crítica**. 2024. 223p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2024.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2014.

BEAN, D. As premissas e os pressupostos na construção conceitual de modelos. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 5., 2012, Petrópolis. **Anais** [...]. Petrópolis: SBEM, 2012. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/files/v_sipem/PDFs/GT10/CC21284545814_A.pdf. Acesso em: 07 de jun. 2022.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2013.

BLOMHØJ, M.; NISS, M. Decoding, understanding, and evaluating extant mathematical models: what does that take? **Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática**, Lisboa, v. 30, n. 2, p. 9-36, 2021.

CRAMER, M. A.I. Drone May Have Acted on Its Own in Attacking Fighters, U.N. Says. **The New York Times**. New York, Seção A, p. 8, 2021. Disponível em: <https://www.nytimes.com/2021/06/03/world/africa/libya-drone.html#:~:text=the%20main%20story%20,A.I.,Own%20in%20Attacking%20Fighters%2C%20U.N.&text=A%20United%20Nations%20report%20suggested,have%20selected%20a%20target%20autonomously>. Acesso em: 19 de jan. 2022.

DALLA VECCHIA, R. **A modelagem matemática e a realidade do mundo cibernético**. 2012. 275 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2012.

D'AMBROSIO, U. Cultural Framing of Mathematics Teaching and Learning. In: Rolf BIEHLER, W.; SCHOLZ, R. S.; WINKELMANN, B. (ed.). **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline**. New York: Kluwer Academic Publishers, 1994. p. 443-455.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

D'AMBROSIO, U. Mathematical Modelling as a Strategy for Building-Up Systems of Knowledge in Different Cultural Environments. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (ed.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences**. New York: Springer, 2015. p. 35-44.

D'AMBROSIO, U. Por que e como ensinar história da matemática. **REMATEC**, Natal, v. 8, n.12, p. 7-21, 2013.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **O Sonho de Descartes**. Rio de Janeiro: Francisco Alves Editora, 1988.

DEISENROTH, M. P.; FAISAL, A. A.; ONG, C. S. **Mathematics for Machine Learning**. Cambridge: Cambridge University Press, 2020. Disponível em: <https://mml-book.github.io/>. Acesso em: 26 de jan. 2022.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

FREIRE, P. **À sombra desta mangueira**. 67. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2021.

FREIRE, P. **Extensão ou comunicação?**. 12. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1977.

FREIRE, P. **Paulo Freire: entrevista**. [1996]. Entrevistador: D'AMBROSIO, Ubiratan. [S.l]: [s.n], 1996. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=o8OUA7jE2UQ>. Acesso em: 15 de set. 2021.

FREIRE, P. **Pedagogia do Oprimido**. 67. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2019.

HESTENES, D. Modeling Theory for Math and Science Education. In: LESH, R.; GALBRAITH, P. L.; HAINES, C. R.; HURFORD, A. (ed.). **Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies**. New York: Springer, 2010. p. 13-41.

JAPIASSÚ, H.; MARCONDES, D. **Dicionário básico de filosofia**. 3. ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2001.

JAVARONI, S. L. **Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias**. 2007. 231f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, 2007.

KOSIK, K. **Dialética do concreto**. 2. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1976.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. 3. ed. 1. reimp. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2017.

MULLER, M. C. **Modelos matemáticos no ensino da matemática**. 1986. 140f. Dissertação (Mestrado em Educação – Metodologia de Ensino). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1986.

NAGLE, R. K.; SAFF, E. B.; SNIDER, A. D. **Equações diferenciais**. 8. ed. São Paulo: Pearson, 2012. E-book. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br>. Acesso em: 23 maio 2024.

NISS, M. Models and Modelling in Mathematics Education. **EMS Newsletter**, Of the European Mathematical Society, Zurich, n. 86, p. 49-52, 2012.

NOGUEIRA, E. A.; MARTINS, L. E. B.; BRENZIKOFER, R. **Modelos matemáticos nas**

ciências não-exatas. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2008. E-book. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br>. Acesso em: 22 maio 2024.

O'NEIL, C. **Algoritmos de destruição em massa:** como o big data aumenta a desigualdade e ameaça a democracia. 1. ed. Santo André: Editora Rua do Sabão, 2020.

ONU – United Nations, Security Council. **Final report of the Panel of Experts on Libya established pursuant to Security Council resolution 1973 (2011).** New York. March 2021. Disponível em: <https://undocs.org/S/2021/229>. Acesso em: 24 jan. 2022.

ROQUE, T. **O dia em que voltamos de Marte:** uma história da ciência e do poder com pistas para um novo presente. São Paulo: Planeta, 2021.

SILVA, F. S.; CATELLI, F. Os modelos na ciência: traços da evolução histórico-epistemológica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 41, n. 4, p. 01-09, 2019.

SKOVSMOSE, O. **Critical Mathematics Education.** Aalborg: Springer, 2023.

SKOVSMOSE, O. **Educação Crítica:** Incerteza, matemática, responsabilidade. Tradução: Maria Aparecida Viggiani Bicudo. São Paulo: Cortez, 2007.

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica:** a questão da democracia. 6. ed. Campinas: Papirus, 2013.

SOARES, D. S. **Uma abordagem pedagógica baseada na análise de modelos para alunos de biologia:** qual o papel do software? 2012. 341f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, 2012.

SOUSA, E, S. **Análise de Modelos: um método de ensino de Matemática na Educação Básica.** Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2019.

SOUSA, E, S.; LARA, I. C. M.; RAMOS, M. G. Concepções de modelagem e a pesquisa em sala de aula na Educação Matemática. **Revista Exitus**, v. 8, n. 1, p. 250-275, 2018.

STEWART, J. **Cálculo:** volume I. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

TORTOLA, E. **Configurações de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** 2016. 304f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

WITTGENSTEIN, L. **Tractatus Logico-Philosophicus.** London: Routledge, 1992.