revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Pensamento geométrico, visualização e imaginação no ensino de geometria: estratégias com materiais concretos na formação de professores

DOI: https://doi.org/10.33871/rpem.2025.14.34.10095

Mauricio Ramos Lutz[1]
José Carlos Pinto Leivas[2]

Resumo: As representações gráficas desempenham papel fundamental no ensino de geometria, pois favorecem o desenvolvimento do pensamento geométrico, da visualização e da imaginação. Este estudo investigou como doutorandos em Ensino de Ciência e Matemática aplicam essas habilidades em uma disciplina de geometria, por meio de atividades práticas com materiais concretos. A pesquisa adotou uma abordagem qualitativa e exploratória, com oito participantes. Para a coleta de dados, foram utilizadas tarefas práticas e formulários eletrônicos, que asseguram respostas sequenciais e autênticas. A análise dos dados foi realizada por meio de uma abordagem qualitativa e interpretativa, com base nas respostas escritas dos participantes, articuladas com referenciais teóricos da educação matemática para identificar avanços, dificuldades e estratégias no desenvolvimento do pensamento geométrico, da visualização e da imaginação. As atividades propostas envolveram a formulação de conjecturas, o uso da imaginação e a manipulação de tiras de papel para a construção e a análise de quadriláteros. Os resultados indicaram avanços no desenvolvimento do pensamento geométrico e da visualização, além de evidenciar dificuldades como a previsão de relações geométricas e a identificação de propriedades. Conclui-se que o uso de atividades interativas com materiais concretos pode potencializar a aprendizagem geométrica ao integrar teoria e prática. O estudo reforça a necessidade de formar educadores aptos a explorarem metodologias que promovam visualização e imaginação, fortalecendo o ensino de geometria.

Palavras-chave: Pensamento visual; Geometria; Quadriláteros; Formação de professores.

GEOMETRIC THINKING, VISUALIZATION AND IMAGINATION IN THE TEACHING OF GEOMETRY: STRATEGIES WITH CONCRETE MATERIALS IN TEACHER TRAINING

Abstract: Graphical representations play a fundamental role in the teaching of geometry, as they favor the development of geometric thinking, visualization and imagination. This study investigated how doctoral students in Science and Mathematics Teaching apply these skills in a Geometry subject, through practical activities with concrete materials. The research adopted a qualitative and exploratory approach, with eight participants. Practical tasks and electronic forms were used to collect data, ensuring sequential and authentic responses. The data was analyzed using a qualitative and interpretative approach, based on the participants' written responses, which were articulated with theoretical references in Mathematics Education to identify progress, difficulties and strategies in the development of geometric thinking, visualization and imagination. The proposed activities involved formulating conjectures, using imagination and manipulating strips of paper to construct and analyze quadrilaterals. The results showed progress in the development of geometric thinking and visualization, as well as difficulties such as predicting geometric relationships and identifying properties. It is concluded that the use of interactive activities with concrete materials can enhance geometric learning by integrating theory and practice. The study reinforces the need to train educators to explore methodologies that promote visualization and imagination, strengthening the teaching of geometry.

[1] Doutor em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Franciscana (UFN). Professor titular do Instituto Federal Farroupilha (IFFar) – Campus Alegrete. E-mail: mauricio.lutz@iffarroupilha.edu.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1215-1933.
[2] Doutor em Educação pela Universidade Federal do Paraná (UFPR). Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana (UFN). E-mail: leivasjc@ufn.edu.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6876-1461.

Keywords: Visual thinking; Geometry; Quadrilaterals; Teacher training.

1 Introdução

Desde os primórdios da humanidade, as representações gráficas têm desempenhado papel importante na comunicação e registro de ideias, perpetuando conhecimentos e experiências ao longo do tempo. Exemplo disso são as pinturas rupestres da idade da pedra, que, mesmo rudimentares, demandam do observador uma capacidade de imaginação e interpretação para decifrar seus significados. Esses registros não apenas expressam manifestações artísticas, mas também constituem formas simbólicas de comunicação e de preservação da memória coletiva.

Com o advento da escrita, a transmissão de ideias tornou-se mais precisa e duradoura. O uso de materiais como papiros possibilitou a sistematização do conhecimento e sua difusão entre gerações. Na história da matemática, a formalização de conceitos por meio de símbolos e expressões formais ampliaram a capacidade humana de representar e generalizar relações de maior complexidade, especialmente no campo da geometria.

A transição da oralidade para a escrita representa, assim, um marco no desenvolvimento cognitivo humano. A capacidade de registrar o pensamento favoreceu a organização e a sistematização do saber, promovendo avanços em diversas áreas, inclusive na educação matemática. Nesse contexto, a escrita e a linguagem visual atuam como mediadoras na construção de conceitos, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento lógico e espacial.

Atualmente, as tecnologias digitais trouxeram novas possibilidades para o ensino de Geometria. *Softwares* como o *Cabri Géomètre* e, mais recentemente, o *GeoGebra*, transformaram a forma de ensinar e aprender geometria. Esses *softwares* oferecem possibilidades dinâmicas para a exploração de formas, movimentos e conceitos, permitindo que o pensamento geométrico se desenvolva de maneira mais visual, interativa e criativa. A visualização e a imaginação, nesse cenário, deixam de ser atividades restritas à abstração individual e passam a ser representadas de forma dinâmica, ampliando as fronteiras do aprendizado.

No ensino de matemática, em especial no de geometria, o uso de representações gráficas é indispensável para o ensino de conceitos abstratos. Diagramas, desenhos e esquemas são recursos fundamentais para promover a compreensão, estimular a análise e favorecer a criatividade. Por isso, é necessário que a formação docente valorize e explore essas possibilidades desde a graduação até os níveis mais avançados da formação acadêmica.

Diante dessas transformações, torna-se necessário repensar a formação de professores que atuam em diferentes níveis de ensino. É fundamental capacitá-los para integrar essas tecnologias ao processo pedagógico, promovendo uma abordagem mais criativa, interativa e significativa para o desenvolvimento do pensamento visual e geométrico. A formação docente, nesse sentido, deve transcender a mera instrumentalização, promovendo o desenvolvimento de habilidades que integrem tecnologia, pensamento geométrico, visualização e imaginação de forma que possa melhorar o processo de ensino e de aprendizagem de geometria.

A geometria, tradicionalmente ensinada de forma teórica e abstrata, precisa ser ressignificada a partir de práticas que articulem teoria e prática, linguagem simbólica e representação visual, favorecendo a compreensão conceitual e o engajamento dos estudantes. No ensino superior, esse desafio é ainda mais relevante, pois envolve a formação de futuros professores, responsáveis por mediar o processo de aprendizagem nas etapas iniciais da escolarização.

Diante desse cenário, surge a necessidade de compreender como estudantes de pós-graduação, como doutorandos, desenvolvem e aplicam suas habilidades de pensamento geométrico, visualização e imaginação durante atividades práticas. Isso levanta um questionamento central: de que forma esses educadores exploram conceitos geométricos ao lidar com atividades que exigem a criação e a análise de formas, como os quadriláteros?

Com o intuito de investigar esse aspecto, esta pesquisa visa investigar como doutorandos em Ensino de Ciências e Matemática, ao participarem de uma disciplina de geometria, desenvolvem e aplicam competências relacionadas ao pensamento geométrico, à visualização e à imaginação, por meio de atividades práticas que envolvem a criação e a análise de quadriláteros. Busca-se compreender de que forma esses educadores exploram conceitos geométricos ao manipular materiais concretos e registrar suas conjecturas e observações.

Essa abordagem conecta o contexto histórico das representações gráficas ao papel atual das atividades educacionais no desenvolvimento do pensamento geométrico, permitindo uma reflexão mais ampla sobre o ensino da geometria e a formação de educadores. Nessa direção, a seguir, são apresentados alguns fundamentos teóricos que sustentam essa perspectiva, explorando a importância do pensamento geométrico, da visualização e da imaginação no processo de aprendizagem e no desenvolvimento das competências geométricas dos estudantes.

2 Pensamento geométrico, visualização e imaginação

O ensino da geometria desempenha um papel importante na formação escolar do estudante, não só pela sua relevância matemática, como também pela sua capacidade de desenvolver as competências intelectuais dos discentes. Entre essas habilidades, destacam-se o pensamento geométrico, a visualização e a imaginação, que se entrelaçam no processo de aprendizagem. Segundo Ferreira (2010, p. 26), existe a necessidade de

> [...] investigar diferentes formas de trabalhar a geometria para atingir um dos principais objetivos educacionais dessa disciplina: a capacidade de abstração espacial a partir de projeções nos espaços unidimensional, bidimensional e tridimensional. Tal competência se incrementa com atividades que possibilitam o desenvolvimento da habilidade de visualização para a formação do pensamento geométrico.

O pensamento geométrico, portanto, emerge como uma habilidade necessária para o aprendizado da geometria, pois envolve a habilidade de analisar e pensar sobre a forma, o espaço e suas relações. Tall (1991) reforça essa visão ao afirmar a relação entre a criatividade e a criação de ideias de aprendizagem na mente humana, organizadas de forma lógica, para verificar a essência e apresentá-la à comunidade matemática. Essa perspectiva enfatiza que o pensamento geométrico não se limita à memorização de padrões ou conceitos, mas envolve um processo dinâmico de criação e verificação de conhecimento, no qual é necessária criatividade e habilidade lógica.

Nessa articulação, destaca-se o pensamento visual, entendido como a capacidade de representar, transformar e manipular mentalmente imagens e estruturas espaciais, integrando percepção, raciocínio e abstração. De acordo com Duval (2011), a visualização é um registro semiótico essencial no pensamento matemático, pois permite converter representações e construir significados. Já Presmeg (2014) afirma que o pensamento visual envolve múltiplas formas de representação, sejam elas visuais, verbais ou simbólicas, e que a flexibilidade entre essas formas é fundamental para o entendimento matemático profundo.

Além disso, estudos mais recentes, como os de Arcavi (2021), ressaltam que o pensamento visual não é apenas um recurso auxiliar, mas sim uma forma legítima de raciocínio matemático, especialmente na resolução de problemas geométricos. Assim, o pensamento visual atua como ponte entre a visualização e a imaginação, favorecendo a construção de conjecturas, a antecipação de resultados e a validação de ideias matemáticas, sendo, portanto, elemento central no ensino e na aprendizagem da geometria. A visualização também desempenha um papel neste contexto da aprendizagem, atuando como uma ponte entre o pensamento mental e o raciocínio abstrato. Segundo Cifuentes (2005, p. 71),

> A visualização será o principal mecanismo para “ver” a verdade de um

> resultado matemático sem recurso à demonstração lógica. As demonstrações visuais farão uso possivelmente de uma linguagem visual apropriada, envolvendo também meios computacionais, os quais podem pôr em evidência a expressividade artística da matemática; todo conceito de visualização remete a uma certa “realidade”, pois “a realidade” é a experiência visual básica.

A partir dessa perspectiva, a visualização transcende a mera representação de figuras ou objetos, tornando-se um recurso ativo e interativo que conecta a percepção intuitiva à exploração conceitual. Essa abordagem sugere que a visualização não é apenas uma representação estática, mas um processo dinâmico que facilita a compreensão e a descoberta de conceitos matemáticos. Frota e Couy (2009, p. 4) apoiam essa ideia ao definirem visualização como

> [...] um processo de criar e/ou interpretar e registrar ideias e imagens, que por sua vez podem desencadear novas ideias e imagens. Nessa perspectiva, a visualização é parte do conjunto de processos de fazer Matemática, ao lado da intuição, criação, abstração, formalização, comunicação, entre outros, podendo ao mesmo tempo impulsionar o desenvolvimento de tais processos.

Essa interconexão destaca a importância de integrar a visualização de maneira ativa no ensino da geometria, promovendo um aprendizado mais envolvente e instigador. Leivas (2009) amplia essa discussão dizendo que a visualização não deve ser vista apenas como uma forma de apresentação de figuras ou objetos, mas como uma função que ajuda a criar conhecimento matemático e comunicação em diferentes áreas. Essa perspectiva é apoiada por Flores (2007, p. 34), enfatizando que “a visualização não é como um fim em si mesma, mas um meio para o entendimento de conceitos matemáticos”. Segundo a autora, essa ligação entre percepção e Geometria transcende a sala de aula, mostrando sua importância em diferentes áreas educacionais. A importância da visualização é enfatizada por Flores *et al.* (2012, p. 40) que descrevem o

> [...] processo de construção e transformação de imagens visuais mentais; uma atividade cognitiva que é intrinsecamente semiótica; processo de formação de imagens (mentais, com lápis e papel, ou com o auxílio de tecnologias) e utilização dessas imagens para descobrir e compreender matemática; forma de pensamento que torna visível aquilo que se vê, extraindo padrões da representação.

A definição proporciona uma perspectiva multifacetada, que não só promove a compreensão de conceitos, mas também pode estimular a criatividade e a capacidade de resolução de problemas. Segundo Kaleff (2003), são necessárias descrições claras dos modelos geométricos para compreender os objetos geométricos, o que demonstra a importância do treinamento na interpretação das informações visuais. Estas competências são fundamentais para que os estudantes possam navegar entre representações visuais e conceitos, podendo assim promover a aprendizagem.

Essa relação entre compreensão visual e interpretação de modelos geométricos reforça a ideia de que a visualização não é apenas um suporte para o aprendizado, mas um elemento importante no desenvolvimento do pensamento geométrico. Nesse sentido, Arcavi (2003) expande essa perspectiva ao definir a visualização como um conjunto de habilidades, métodos e ferramentas para criar, interpretar e refletir sobre representações, seja mentalmente, no papel ou com o auxílio de tecnologias.

A imaginação, por sua vez, complementa o pensamento geométrico e a visualização, proporcionando aos estudantes a capacidade de explorar novas dimensões cognitivas e transcender os limites das representações visuais tradicionais. Conforme afirmam Hilbert e Cohn-Vossen (1932, p. iii), no prefácio de seu livro *Geometry and the Imagination*,

> [...] com a ajuda da imaginação visual, podemos iluminar a variedade de fatos e de problemas de Geometria e, além disso, é possível, em muitos casos, retratar o esboço geométrico dos métodos de investigação e demonstração, sem necessariamente entrar em pormenores relacionados com a estrita definição de conceitos e com cálculos reais. (tradução nossa).

Essa abordagem não apenas facilita a compreensão intuitiva de conceitos geométricos, mas também incentiva a criatividade e a exploração de novas ideias. Complementando essa perspectiva, Skemp (1993) apoia esta visão ao discutir os diferentes conceitos de competência. Ele afirmou que algumas pessoas preferem ver, enquanto outras preferem falar. Essa experiência diversificada destaca a importância de adotar estratégias de aprendizagem que atendam as diferentes necessidades dos estudantes, permitindo que todos desenvolvam suas habilidades geométricas. Ao incorporar a imaginação no ensino da geometria, educadores promovem um ambiente mais inclusivo e estimulante, em que a criatividade é incentivada como parte do processo de aprendizagem.

A relevância de conjecturas no ensino da geometria está vinculada ao desenvolvimento do pensamento geométrico, da visualização e da imaginação. Como hipótese a ser investigada, a conjectura estimula a curiosidade e o engajamento dos estudantes na resolução de problemas matemáticos. Para Ferreira (2010) e Tall (1991), o pensamento geométrico é necessário na formulação de conjecturas, combinando criatividade e rigor lógico. Assim, a conjectura atua como catalisador para descobertas e aprendizagens.

Nessa perspectiva, a integração do pensamento geométrico com outras dimensões da aprendizagem geométrica encontra suporte nas ideias de Cifuentes (2005) e Arcavi (2003). Esses autores destacam que as demonstrações visuais representam um ponto de partida essencial para testar conjecturas, conectando a intuição à formalização lógica. Tal abordagem não apenas possibilita aos estudantes experimentar e aprimorar suas hipóteses de maneira acessível, como também evidencia o papel da visualização como ferramenta para explorar e validar ideias. Nesse contexto, a imaginação surge como um elemento complementar, ampliando os horizontes investigativos e incentivando a análise de múltiplas perspectivas, ultrapassando as limitações das representações tradicionais.

Para integrar pensamento geométrico, visualização e imaginação no ensino, são necessárias práticas pedagógicas que conectem essas dimensões. Atividades como construção de modelos físicos, uso de tecnologias e exploração de ambientes tridimensionais estimulam a visualização e a imaginação, além de promoverem criatividade na resolução de problemas geométricos. Essas ações facilitam a compreensão conceitual e potencializam habilidades de análise e abstração.

A conjectura, enquanto elemento central no aprendizado, motiva e engaja os estudantes, promovendo a formulação de hipóteses e a exploração de suas implicações. Essa prática estimula a participação ativa dos estudantes, tornando-os protagonistas no processo de aprendizagem. Ao fazer isso, desenvolvem autonomia, pensamento crítico e confiança na resolução de problemas.

3 Aspectos metodológicos

Esta pesquisa caracteriza-se como um estudo qualitativo de natureza exploratória, delineado visando compreender como doutorandos em Ensino de Ciências e Matemática desenvolvem o pensamento geométrico, a visualização e a imaginação por meio de atividades práticas no contexto de uma disciplina de geometria. A abordagem qualitativa é apropriada para investigar processos formativos complexos, pois considera a perspectiva dos participantes e o contexto em que estão inseridos, permitindo interpretações fundamentadas nas experiências vividas (Bogdan; Biklen, 1994). O caráter exploratório justifica-se pela busca de compreensão aprofundada de um fenômeno pouco investigado em turmas de pós-graduação, como o uso de materiais concretos para o ensino de quadriláteros com foco em visualização e imaginação.

O estudo foi realizado em uma universidade privada da região sul do Brasil, durante uma disciplina ofertada no curso de doutorado em Ensino de Ciências e Matemática. Participaram da investigação oito doutorandos regularmente matriculados, identificados neste trabalho pelas siglas D_1 a D_8, garantindo o anonimato. As aulas ocorreram em formato híbrido, com parte dos estudantes participando presencialmente e outros de forma remota, por meio da plataforma *Google Meet*[3]. Essa particularidade metodológica exigiu o planejamento cuidadoso das atividades e o envio prévio de materiais para os participantes remotos, assegurando condições equitativas de participação.

A coleta de dados foi conduzida por meio de 11 atividades práticas previamente planejadas e aplicadas durante o encontro da disciplina. As tarefas foram registradas em um formulário eletrônico (*Google Forms*[4]), estruturado de forma sequencial, impedindo retrocessos nas respostas, o que favoreceu a espontaneidade e a autenticidade das produções dos participantes. Cada atividade solicitava inicialmente uma conjectura, baseada na imaginação visual do participante, seguida da realização concreta da tarefa, utilizando tiras de papel, colagens e recortes para construir e analisar figuras geométricas.

O corpus de análise foi composto pelos registros textuais das respostas dos participantes, organizados por investigação (atividade), e analisados qualitativamente com base na Análise de Conteúdo, conforme proposta por Bardin (2011). Esse método permitiu identificar categorias emergentes a partir das regularidades nas respostas, tais como: dificuldades na visualização de transformações, interpretações equivocadas de figuras geométricas e estratégias de antecipação e validação de conjecturas. As categorias foram interpretadas à luz do referencial teórico da Educação Matemática, com ênfase nos conceitos de pensamento geométrico (Tall, 1991), visualização (Arcavi, 2003; Cifuentes, 2005) e imaginação (Hilbert; Cohn-Vossen, 1932).

Além disso, optou-se por integrar as análises dos dados às discussões teóricas ao longo da apresentação dos resultados, possibilitando uma leitura articulada entre as ações dos participantes e os fundamentos epistemológicos do ensino de geometria, respeitando a complexidade e a natureza processual da aprendizagem investigada.

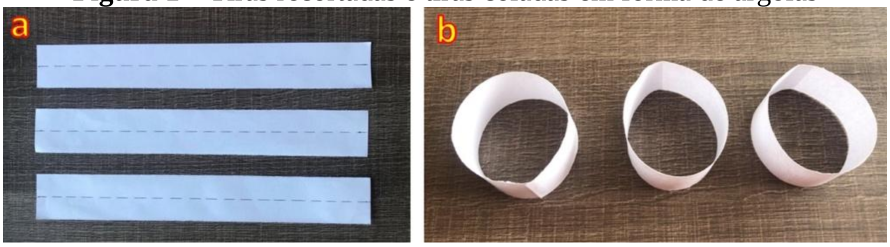
4 Descrição das atividades, análise e discussão dos resultados

No decorrer da investigação, a qual é embasada em forma de jogo por Rego e Rego (1999), foram realizadas 11 investigações, as quais serão ilustradas aqui e analisadas as soluções apresentadas à luz dos fundamentos teóricos citados. Inicialmente, foram tomadas as tiras, como ilustrado na Figura 1(a), de comprimentos aproximadamente 30cm (primeiro momento) e 15cm (segundo momento), com largura de 4cm demarcando em cada uma a linha

[3] O *Google Meet* é uma ferramenta de videoconferência e chamadas de voz.
[4] O *Google Forms* é um serviço gratuito para criar formulários online.

tracejada pelo ponto médio do menor lado e ao longo de todo o comprimento do lado maior. Após recortadas, colar as tiras de 30cm~~,~~ formando cada uma, um anel comum de papel, como na Figura 1(b).

Figura 1 – Tiras recortadas e tiras coladas em forma de argolas



(a) (b)

Fonte: Acervo dos autores (2024).

Após o recorte e a colagem das tiras, inicia-se a 1ª investigação, a qual consiste em analisar as respostas à seguinte pergunta: quais propriedades você consegue identificar na figura construída? Analise e explore os detalhes. Isto indica dificuldades recorrentes na imaginação e na visualização dos investigados. Por exemplo, as respostas de D_7 (Formato circular, 2 faces, simétrica, maleável, limitada.) e D_8 (Pode-se formar um círculo, ou outra figura conforme manipula-se.) sugerem que a figura representa um círculo, o que demonstra uma interpretação inadequada do conceito de círculo como sendo uma região plana. Essa limitação evidencia a necessidade de desenvolver competências específicas relacionadas à visualização geométrica. Por outro lado, algumas respostas mostraram percepções mais alinhadas com a proposta esperada. A resposta de D_5 (Possui 2 lados, de dentro e de fora e é uma estrutura cilíndrica.), por exemplo, descreve a figura como uma "estrutura cilíndrica", reconhecendo características como bordas internas e externas. Apesar de certa imprecisão ao confundir estrutura plana com sólido, essa observação revela maior familiaridade com o objeto investigado.

Outro ponto de destaque está nas respostas de D_1 (A projeção do objeto sobre o plano da mesa assemelha-se a uma elipse, enquanto seu formato remete à superfície lateral de um cilindro.). Para D_2 (Superfície única, borda única.) e para D_4 (Percebo a possibilidade de explorar diversos conteúdos, como o comprimento da linha pontilhada, o raio e o diâmetro do cilindro, sua área lateral, volume interno e altura.), sendo que ambas mencionam propriedades geométricas e métricas mais específicas, como a projeção elíptica, a unicidade da superfície e medidas associadas, como raio, diâmetro e área lateral. Essas observações demonstram uma capacidade inicial de identificar atributos importantes da figura. Em contrapartida, respostas como a de D_6, que descrevem a figura como "simétrica, maleável e limitada", refletem uma abordagem mais descritiva do que analítica. Essa diversidade de interpretações reforça a ideia, mencionada por Ferreira (2010), de que o ensino de Geometria deve enfatizar estratégias que estimulem a visualização e a compreensão conceitual, permitindo aos estudantes uma análise mais aprofundada das propriedades dos objetos.

Ao observar a Figura 2, que ilustra a configuração inicial do anel com a linha pontilhada, os participantes são convidados a responder à pergunta da 2ª investigação: o que acontece quando cortamos o anel pela linha pontilhada? As respostas apresentaram diferentes interpretações sobre as mudanças resultantes do corte. Algumas respostas, como a de D_1 (Como a linha tracejada foi marcada na metade da altura do objeto, o corte resulta em dois sólidos congruentes entre si, com o mesmo formato do original, porém com metade da altura.), destacam que o corte gera dois sólidos com o mesmo formato do original, porém com metade da altura, congruentes entre si. Por outro lado, a resposta de D_2 (Deixará de ser uma faixa de Möebius, passando a apresentar dois lados distintos e duas bordas.) indica que o objeto resultante deixará de ser uma faixa de Möebius, adquirindo dois lados e duas bordas, enquanto D_3 resume o resultado em "duas novas figuras semelhantes". A resposta de D_4 (Todas as propriedades anteriores serão mantidas, exceto altura e volume, reduzidos à metade, enquanto comprimento da linha pontilhada, raio, diâmetro e área lateral permanecem inalterados e exploráveis.) apresenta um maior detalhamento do que as anteriores, sugerindo que propriedades como comprimento da linha pontilhada, raio, diâmetro e área lateral podem ser exploradas, embora a questão do volume seja tratada de forma equivocada, já que o objeto não é um sólido.

Figura 2 – Um anel obtido pela colagem das extremidades.

Fonte: Acervo dos autores (2024).

Respostas como as de D_5 (Ficamos com 2 anéis de mesmas propriedades.) e D_6 (As propriedades permanecem inalteradas, porém as faces terão as medidas pela metade.) indicam percepção de que as propriedades dos anéis resultantes são preservadas, mas ajustadas em medidas proporcionais, como a altura. As respostas de D_7 e D_8, no entanto, simplificam as observações, mencionando apenas "dois círculos" ou "dois novos anéis", respectivamente, demonstrando uma visão mais limitada do impacto geométrico do corte. A diversidade de respostas reflete dificuldades na compreensão conceitual de termos como altura e volume. Conforme Tall (1991), o desenvolvimento do pensamento geométrico envolve a organização lógica de ideias de aprendizagem, o que reforça a importância de trabalhar conceitos de forma clara e integrada para estimular a visualização.

Na 3ª investigação, os participantes foram convidados a criar um segundo anel, idêntico ao primeiro, e fixá-lo ortogonalmente ao anterior. Eles deveriam refletir sobre o que imaginavam que encontrariam ao cortar somente o primeiro anel ao longo da linha tracejada e registrar suas hipóteses. D_1 (Terá uma conexão em superfícies.) e D_2 (Vai resultar em um único laço.) imaginaram o objeto cortado permanecendo fixado ou formando um único laço, enquanto D_3 (Dois anéis idênticos ortogonais a um terceiro.) e D_4 (Acredito que, ao recortar, teremos um anel maior e outros dois menores localizados em seu interior.) visualizaram configurações com dois anéis ortogonais ou um maior com dois menores no interior.

Outros descreveram variações de separação e conexão: “dois anéis abertos” (D_5), “fitas circulares conectadas” (D_6), “superfícies conectadas” (D_7) ou “alças unidas em um ponto” (D_8). Essa etapa evidenciou dificuldades na construção mental da figura resultante, mesmo com o uso de materiais concretos. Como indicado por Cifuentes (2005), a visualização é uma ferramenta essencial para entender conceitos matemáticos, permitindo ver a verdade sem a necessidade de demonstrações lógicas.

Na 4ª investigação, os participantes recortaram o primeiro anel ao longo da linha pontilhada, comparando suas conjecturas iniciais com os resultados. D_1 (Minha hipótese não foi confirmada, pois o corte resultou em dois anéis conectados por uma tira de papel, formando uma corrente.), D_2 (Minha hipótese não foi confirmada.) e D_3 (Com base na leitura da 3ª investigação a minha resposta foi diferente do resultado.) admitiram que o resultado foi diferente do esperado, com D_1 observando anéis separados como algemas e D_3 relacionando o resultado à etapa anterior. D_4 e D_5 (Sim, correspondeu à visualização que tive inicialmente.) apresentaram percepções contrastantes, com D_4 identificando “dois anéis conectados por um papel retangular” e D_5 confirmando sua visualização inicial.

Outros participantes relataram hipóteses parcialmente confirmadas, “Minha hipótese não foi completamente confirmada.” (D_6), “Figuras com propriedades diferentes.” (D_7) ou “Resultados inesperados compreendidos posteriormente.” (D_8). As respostas reafirmam a importância do material concreto para o desenvolvimento da visualização geométrica e destacam, como apontado por Tall (1991), o papel da organização lógica de ideias no pensamento geométrico.

Dando continuidade, na 5ª investigação, os participantes imaginaram o que aconteceria D_1 “uma figura retangular com espessura”, enquanto D_2 sugeriu “uma tira reta”. D_3 (Um retângulo.) e D_4 (Formará um retângulo com espessura, delimitado por anéis de alturas iguais, embora não seja um quadrado devido aos diferentes tamanhos dos anéis.). Todos eles concordaram na formação de um retângulo, com D_4 detalhando anéis menores conectados. D_5 (Vai formar uma figura com 4 lados.) descreveu uma figura de quatro lados; D_6 (Irá formar quatro linhas, criando a figura de um H) mencionou um "H"; e D_7 (Obtemos uma única faixa com duas torções.) sugeriu uma faixa longa com torções. D_8 (Ficou bem complexo, não consegui intuir ou imaginar o que formará.) relatou dificuldade em prever o resultado.

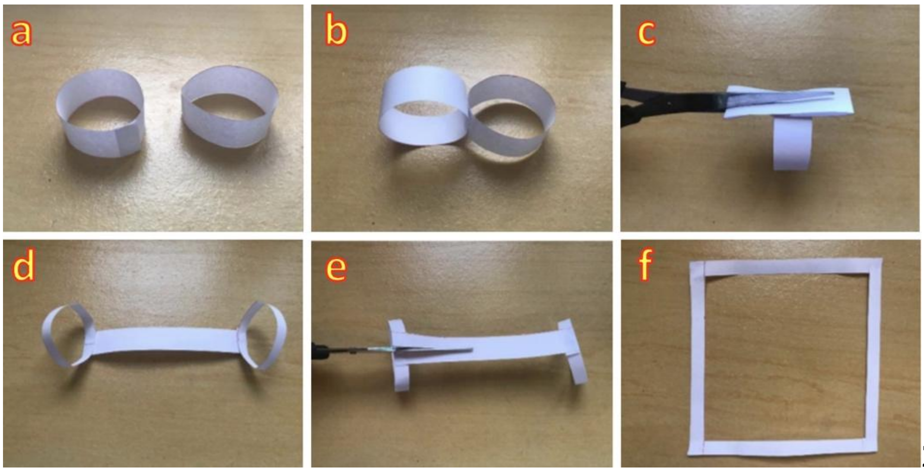
As respostas indicam que alguns participantes, como D_1, conseguiu construir mentalmente a figura resultante, associando-a a quadriláteros, ele identificou corretamente o retângulo externo como a fronteira da região retangular, distinguindo-o do polígono interno, embora não pudesse afirmar que se tratava de um quadrado devido às diferenças no comprimento das tiras iniciais. Ao que tudo indica, as atividades estão proporcionando um desenvolvimento visual no indivíduo.

Para finalizar essa construção, na 6ª investigação, os participantes recortaram o anel e discutiram se o resultado confirmava suas conjecturas. D_1 (Confirmado o pensamento.) e D_3 (Sim, o recorte representou exatamente como tinha imaginado.) confirmaram suas conjecturas. D_4 (Eu imaginava que se formariam duas "algemas" separadas por tiras, e não uma moldura quadrada.) ficou surpreso ao ver uma moldura quadrada em vez de duas "algemas". O participante D_5 registra (Minha hipótese inicial não se confirmou; formou-se uma moldura quadrangular devido à colagem ortogonal de anéis de mesmo comprimento.); D_6 (Não formou como eu imaginava, mas compreendi por que resultou em um retângulo.) e D_7 (Sim, ficou algo semelhante a uma moldura, com formato próximo ao de um quadrado.) descreveram figuras próximas a formas quadrangulares, enquanto D_2 afirma: “não consegui realizar a atividade”. Essas respostas refletem os diferentes níveis de sucesso na antecipação do resultado, indicando avanços no desenvolvimento da visualização geométrica e na compreensão das relações entre formas e cortes.

Percebemos no que indica D_8 (Não formou como eu imaginava, mas compreendi por que resultou em um retângulo.) que ele reconheceu o resultado ser distinto do imaginado, mas compreendeu o processo, mostrando a importância do uso de materiais concretos para despertar a imaginação dos estudantes em geometria. Nesse sentido, Hilbert e Cohn-Vossen (1932) destacam que, com o auxílio da imaginação visual, é possível explorar a diversidade de fatos e problemas geométricos, bem como esboçar métodos de investigação e demonstração sem a necessidade de recorrer, de imediato, a definições rigorosas ou cálculos precisos.

A atividade permitiu explorar o raciocínio visual e revelou a importância da imaginação para ilustrar problemas geométricos e métodos de investigação. A Figura 3 ilustra o processo de obtenção de uma forma quadrada analisado até o momento, primeiro: dois anéis de mesmo tamanho, Figura 3(a), colar de forma ortogonal um ao outro, Figura 3(b) e recortar um dos anéis no sentido longitudinal, Figura 3(c). Com isso, ficamos com um objeto parecendo uma algema, dois anéis unidos em um segmento de reta, Figura 3(d). Para concluir, cortar de forma longitudinal a tira (segmento de reta), Figura 3(e) e, desta forma, obter uma nova figura, Figura 3(f). Após cortados os dois anéis, tem-se um formato quadrado (coloque-o sobre uma superfície plana).

Figura 3 – Construção do quadrado partindo de anéis.



2

Fonte: Acervo dos autores (2024).

Na 7ª investigação, foi perguntado: como deveriam ser colados os anéis para que o resultado fosse um losango (não quadrado)? As respostas dos participantes variaram: D_1 (Se os anéis fossem colados em um ângulo diferente de 90°, a figura final manteria os mesmos lados, mas formaria um losango com ângulos opostos congruentes e consecutivos somando 180°.). O participante sugeriu que os anéis deveriam ser colados com um ângulo diferente de 90°, formando um losango com ângulos opostos congruentes e ângulos consecutivos somando 180°. Por sua vez, D_2 indica (Acredito que as linhas devem ser coladas formando um ângulo de 45°.); para D_4 (Os anéis deveriam ser colados com um ângulo de 45°, em vez de ortogonalmente.); D_6 (Sugiro colar os anéis inclinados a 45°, em vez de em ângulo reto.), os quais mencionaram um ângulo de 45° entre as colagens, enquanto D_3 (Colados seguindo as linhas pontilhadas.)

propôs colar seguindo as linhas pontilhadas. D_5 (Não consegui chegar a essa conclusão, mesmo após tentar manipular as fitas.) não chegou a uma conclusão; D_7 (Exigiria uma criatividade.) destacou a necessidade de criatividade; e D_8 (Não deveriam ser colados em ângulo reto.) enfatizou que a colagem não deveria ser ortogonal.

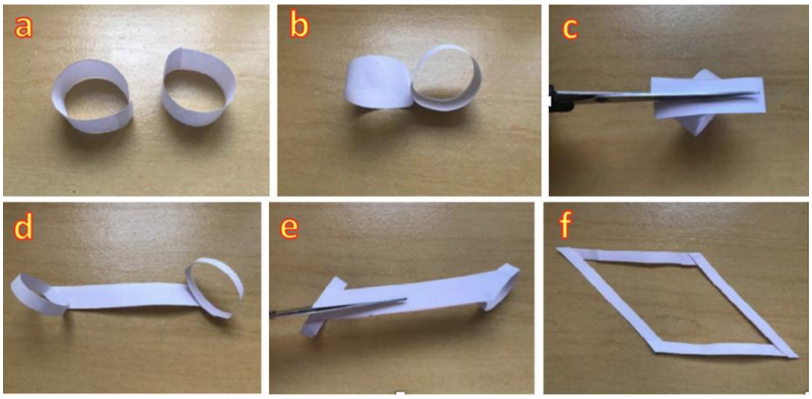
Observa-se nas respostas ao problema na sétima investigação que, embora o material didático explorado estivesse ao alcance de todos, houve pouco envolvimento na sua exploração. No desenvolvimento de habilidades mentais visuais, essas poderiam partir de uma exploração concreta e partir para a abstração, trazendo conceitos geométricos envolvidos. No caso, parece não estar bem formado nesses investigados conceitos dos diversos quadriláteros e, até mesmo, visualizar losangos que não sejam quadrados, uma vez que o conjunto dos quadrados é subconjunto daquele dos losangos e, para tal, o ângulo de colagem só não poderia ser reto. Conforme Flores *et al*. (2012), este processo de construção e transformação de imagens visuais mentais constitui uma atividade semiótica que, no presente caso, seria a conversão de um registro em papel e lápis e aquele em linguagem verbal.

Para a 8ª investigação, foi pedido aos participantes que: refletissem sobre as características ou propriedades de quadrados e losangos. Qual definição provisória você proporia para cada um? As respostas variaram conforme os registros a seguir: D_1 (O quadrado possui quatro vértices e ângulos de 90°, enquanto o losango tem lados opostos de mesma medida.). Este participante descreveu o losango como um paralelogramo com lados opostos congruentes e o quadrado como um paralelogramo com ângulos retos. D_2 indica (Quadrado: 4 lados iguais com ângulos retos. Losango: um quadrado giradinho, com lados iguais e ângulos retos congruentes nas diagonais.) sugeriu que o losango seria um "quadrado girado". D_3 (Quadrado: figura com quatro lados iguais e ângulos internos de 90°; losango: figura com quatro lados iguais e ângulos diferentes de 90°.) simplificou, afirmando que o quadrado tem ângulos de 90° e o losango não.

Já D_4 (O quadrado possui ângulos de 90° entre as arestas e distância uniforme do centro às arestas, enquanto no losango isso varia.) destacou diferenças nas distâncias do centro às arestas. D_5 (No quadrado, os ângulos internos são de 90°, enquanto no losango, os ângulos seriam modificados, mas os lados permanecem congruentes.) mencionou que o quadrado tem ângulos retos e o losango, pares de ângulos congruentes. D_6 (O quadrado tem lados iguais e ângulos retos, enquanto o losango tem lados iguais e ângulos congruentes.) e D_7 (O quadrado possui ângulos retos, enquanto o losango tem ângulos variáveis, mas com lados opostos congruentes.). Estes reforçaram que o quadrado tem ângulos retos e o losango, ângulos variáveis, mas com lados opostos congruentes. D_8 (No conjunto dos quadriláteros convexos, os quadrados são a interseção entre os conjuntos dos retângulos e dos paralelogramos.) resumiu que os quadrados se constituem em um subconjunto dos retângulos e dos paralelogramos. As respostas mostraram variações na compreensão das propriedades dessas figuras e contribuíram para o desenvolvimento das definições geométricas, sendo insuficiente na última conclusão.

Após imaginarem as possibilidades de colagem de anéis de tamanhos diferentes, chegou-se à conclusão de que se deve utilizar duas tiras de papel de mesmas dimensões e colá-las no formato de anel, como mostrado na Figura 4(a). Em seguida, colar os dois anéis de forma inclinada um em relação ao outro, conforme ilustrado na Figura 4(b). Depois, recortar um dos anéis no sentido longitudinal, conforme apresentado na Figura 4(c). Disso resulta um objeto semelhante a uma algema, ou seja, dois anéis unidos por um segmento de reta, Figura 4(d). Para finalizar, ao cortar a tira longitudinalmente (segmento de reta), Figura 4(e), obter um novo objeto, Figura 4(f), que se assemelha a uma figura geométrica, no caso um losango.

Figura 4 - Construção do losango partindo de anéis.



Fonte: Acervo dos autores (2024).

Ao que tudo indica, o processo de criação e interpretação de ideias, como apontado por Frota e Couy (2009) com base na visualização, ainda não proporcionou a criação e a interpretação de conceitos primordiais no ensino de Geometria em uma temática que deveria estar plena na formação destes indivíduos, pois provavelmente ensinam, ao menos na escola básica.

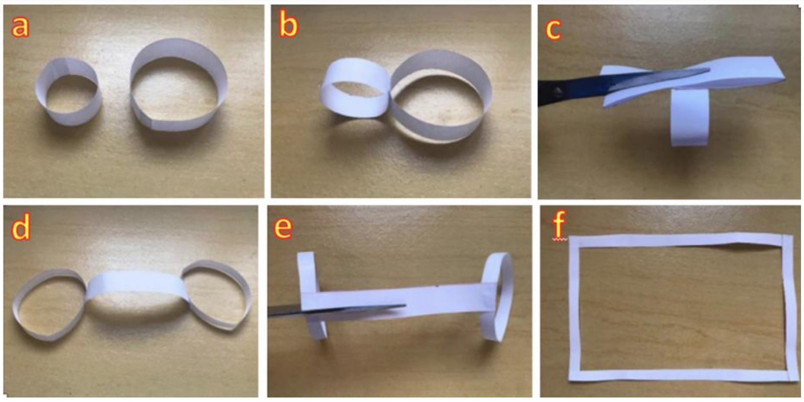
Na 9ª investigação foi questionado: como devem ser os anéis iniciais para que o resultado da nova construção seja um retângulo (não quadrado)? As respostas variaram: D_1 (As tiras dos anéis devem ter tamanhos diferentes, criando lados opostos paralelos e congruentes. Se os anéis forem ortogonais, formam um retângulo; se colados em outro ângulo, formam um paralelogramo.) explicou que isso resultaria em lados opostos paralelos e congruentes se colados ortogonalmente. D_2 (Eles devem possuir tamanhos diferentes.), D_4 (Devem possuir o comprimento do retângulo inicial diferentes.), D_5 (Os anéis devem ter comprimentos distintos.) e D_8 (Pensando na forma de um retângulo, as faixas iniciais deveriam ter comprimentos diferentes.) concordaram com a ideia de comprimentos diferentes. D_3 mencionou um "circunscrito" sem detalhes. D_6 (Os anéis podem ser construídos como no exemplo anterior, mas a colagem deve ter um ângulo diferente do ortogonal, mantendo os mesmos cortes.) sugeriu uma colagem não ortogonal, mantendo os cortes. D_7 (Transformar anéis em um retângulo exige criatividade e adaptação.) ressaltou o desafio criativo de adaptar os anéis. As respostas destacaram a importância das diferenças nos comprimentos das tiras para criar um retângulo.

Nesta investigação, ao explorar como os anéis iniciais deveriam ser configurados para formar um retângulo, destaca-se a importância das diferenças nos comprimentos das tiras, evidenciando o papel da visualização como ferramenta essencial no processo de entendimento. Esse enfoque está alinhado à perspectiva de Cifuentes (2005), que ressalta a visualização como mecanismo de expressão e como um dos grandes desafios da Matemática do século XXI para promover argumentos lógicos. Além disso, essa abordagem reflete o conceito defendido por Arcavi (2003), que define a visualização como habilidade e processo de interpretar e criar representações, fomentando o desenvolvimento do pensamento geométrico e a compreensão de ideias matemáticas complexas.

Após usar a imaginação e as possibilidades de colagem de anéis de tamanhos diferentes, chega-se à conclusão de que se deve considerar duas tiras de papel de dimensões diferentes e colá-las no formato de anel, conforme ilustrado na Figura 5(a). Em seguida, colam-se os dois anéis de forma perpendicular, como mostrado na Figura 5(b). Depois, recorta-se um dos anéis no sentido longitudinal, conforme apresentado na Figura 5(c), resultando em um objeto semelhante a uma algema, ou seja, dois anéis unidos por um segmento de reta, como ilustrado na Figura 5(d). Para finalizar, ao cortar a tira longitudinalmente, Figura 5(e), obtém-se um novo objeto, Figura 5(f).

Figura 5 – Construção do retângulo partindo de anéis.

revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA



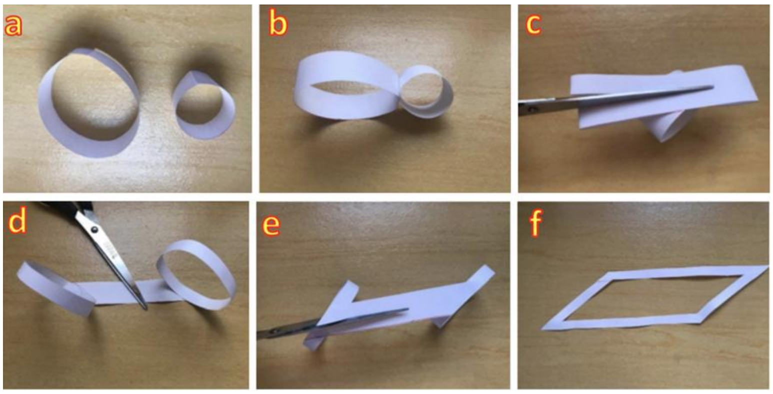
Fonte: Acervo dos autores (2024).

Na penúltima investigação (10ª), foi questionado: como devem ser os anéis, e como colá-los, para que o resultado seja um paralelogramo (não quadrado, não retângulo e não losango)? As respostas variaram, mas todas sugeriram que os anéis devem ser diferentes em tamanho e colados de maneira não ortogonal. D_1 (Os anéis devem ter comprimentos diferentes e serem colados de forma não ortogonal.), D_3 (Devem ter tamanhos variados e o ângulo de colagem não pode ser ortogonal.), D_4 (Anéis com tiras de tamanhos diferentes, colados de maneira não ortogonal.), D_5 (Para formar a figura desejada, os anéis devem ter comprimentos diferentes e ser colados em um ângulo não ortogonal) e D_8 (Anéis de comprimentos diferentes, colados de forma não ortogonal.) concordaram que os anéis deveriam ter tamanhos diferentes e serem colados de forma não ortogonal. D_2 (Os anéis devem ter a mesma dimensão, desalinhados de forma proposital e colados em um ângulo oblíquo.) sugeriu que os anéis tivessem a mesma dimensão, mas fossem desalinhados e colados em um ângulo oblíquo. D_6 (Os anéis devem ter comprimentos diferentes e devem ser colados coincidentes.) propôs colar os anéis de forma coincidente, apesar das diferenças no comprimento. D_7 (Os anéis podem ser cortados em segmentos retos e reorganizados para formar um paralelogramo com lados opostos paralelos e de mesmo comprimento.), de forma criativa, sugeriu cortar os anéis em segmentos retos e reorganizá-los para garantir lados opostos paralelos e iguais em comprimento.

As respostas dos estudantes evidenciaram diversas abordagens criativas para a colagem dos anéis, com destaque para a variação de tamanho e a disposição não ortogonal, essenciais na construção de um paralelogramo. Essa prática reflete o que Frota e Couy (2009) defendem ao destacar a relevância ao se investigar as ideias para uma posterior formalização, coloca-se o aluno para fazer Matemática, preparando-o não só para reproduzir regras, mas principalmente para compreendê-las e aplicá-las, à luz dos conceitos teóricos. Além disso, como aponta Flores (2007), a visualização, nesse contexto, atua como um meio valioso para facilitar o entendimento de conceitos matemáticos, incentivando a exploração de estratégias e representações.

Após usarem a imaginação, os participantes testaram suas conjecturas e, chegaram à conclusão de que se deve pegar duas tiras de papel de dimensões diferentes e colá-las no formato de anel, conforme ilustrado na Figura 6(a). Em seguida, os dois anéis são colados de forma inclinada um em relação ao outro, como mostrado na Figura 6(b). Depois, recortar um dos anéis no sentido longitudinal, conforme apresentado na Figura 6(c), resultando em um objeto semelhante a uma algema, com dois anéis unidos em um segmento de reta, como ilustrado na Figura 6(d). Para finalizar, ao cortar a tira longitudinalmente, Figura 6(e), é obtido um novo objeto, como mostrado na Figura 6(f).

Figura 6 – Construção do paralelogramo partindo de anéis.



Fonte: Acervo dos autores (2024).

Na última investigação foi proposto: um outro tipo de quadrilátero, o trapézio, pode ser obtido de modo semelhante? Justifique sua resposta. As respostas dos participantes variaram consideravelmente. D_1 (Para isso, pelo menos um dos anéis não poderia ser colado “bem certinho”; suas pontas deveriam formar um ângulo, criando um “bico”, o que o tornaria diferente de uma circunferência.) propôs que um anel não fosse colado "bem certinho". D_2 (Os anéis devem ter comprimentos diferentes e ser colados de forma que os lados opostos fiquem paralelos.) sugeriu colar os anéis com comprimentos diferentes e lados opostos paralelos. D_3 (Não, apesar de ser quadrilátero com dois lados paralelos com medidas distintas.) considerou que o trapézio não poderia ser formado da mesma maneira que os outros quadriláteros. D_4 (Para formar o trapézio, a colagem de um dos anéis deve ser em forma de "funil", com ângulo e raios diferentes.) sugeriu uma colagem em forma de um objeto real – o funil. D_5 (Pensei em tiras com cortes diferentes dos anteriores, mas não consegui imaginar como seriam.) não conseguiu imaginar uma solução, enquanto D_6 (Sim. Considerando o modo de colagem diferente.)

acreditou ser possível com uma colagem diferente, mas não diz qual é a diferença. D_7 (Os anéis podem ser cortados em segmentos retos, formando as bases do trapézio.) sugeriu cortar os anéis para formar o trapézio, e D_8 (Talvez, usando fitas de comprimentos diferentes, coladas com angulação não ortogonal e cortes não lineares.) também acreditou ser possível com fitas de comprimentos diferentes e cortes não lineares. As respostas destacaram colagens não ortogonais e o uso de tiras de tamanhos variados.

Desta forma, apenas D_3 observou que o trapézio, ao contrário dos quadriláteros obtidos anteriormente, tem apenas dois lados paralelos. Por esse motivo, não tem como confeccioná-lo utilizando a colagem dos anéis. Era esperado pelos investigadores que a sequência de atividades favorecesse a imaginação, especialmente a curiosidade dos indivíduos na exploração do material didático, permitindo-lhes intuir novas formas de obtenção de entes geométricos, como quadriláteros, que fazem parte da rotina de um estudante desde o ensino fundamental até o doutorado.

Contudo, as dificuldades em visualizar e intuir as características geométricas do trapézio, como a existência de apenas dois lados paralelos, evidenciam a relevância de atividades que desenvolvam o pensamento geométrico. Ferreira (2010) aponta que atividades planejadas para estimular a visualização são essenciais para estabelecer correlações entre propriedades e características dos objetos matemáticos. Tall (1991) complementa essa visão ao destacar que a criatividade no aprendizado matemático surge da organização lógica de ideias, permitindo sua verificação e compartilhamento.

Nesse contexto, Leivas (2009) reforça a visualização como um conjunto de habilidades para interpretar e refletir sobre representações matemáticas, enquanto Flores *et al.* (2012) descrevem-na como um processo cognitivo intrinsecamente semiótico, capaz de construir e transformar imagens mentais para a compreensão de conceitos. Assim, atividades que integrem intuição, abstração e visualização tornam-se necessárias no ensino de Geometria, promovendo o pensamento geométrico, a visualização e a imaginação necessárias para superar desafios como os propostos na investigação.

5 Considerações finais

A pesquisa investigou como doutorandos aplicam o pensamento geométrico, a visualização e a imaginação em atividades de criação e análise de quadriláteros. Os resultados revelaram avanços no desenvolvimento do pensamento geométrico e da visualização, mas também apontaram dificuldades, como a previsão dos efeitos de cortes e a identificação de propriedades geométricas. Estratégias práticas, com o uso de material concreto, mostraram que, apesar das dificuldades iniciais, os participantes avançaram na compreensão conceitual e na visualização geométrica.

De modo geral, o objetivo foi contemplado por meio da análise das estratégias utilizadas pelos participantes para visualizar, construir e compreender as figuras propostas nas atividades. No caso dos doutorandos em Ensino de Ciências e Matemática, em uma disciplina de Geometria, observou-se como aplicaram o pensamento geométrico, a visualização e a imaginação em atividades relacionadas à criação e compreensão de quadriláteros. Ao longo do processo, foi possível identificar progressos na compreensão conceitual e no desenvolvimento da visualização geométrica, apesar das dificuldades iniciais.

As principais limitações observadas referem-se à dificuldade na visualização mental dos efeitos dos cortes longitudinais e na identificação de propriedades geométricas fundamentais. Além disso, alguns participantes demonstraram confusão em relação a conceitos como região plana, altura e congruência, o que reforça a importância de abordagens didáticas mais integradas e contextualizadas.

O estudo alcançou seu objetivo ao relacionar práticas pedagógicas com o desenvolvimento do pensamento geométrico, oferecendo contribuições relevantes para a proposição de estratégias de ensino mais eficazes.

Constatou-se que o conhecimento prévio dos doutorandos sobre conceitos geométricos nem sempre foi suficiente para garantir segurança no processo de abstração e visualização, especialmente em tarefas que exigiam construção e transformação de figuras. Ainda assim, as atividades práticas mostraram-se eficazes para estimular o raciocínio geométrico e a análise das propriedades das figuras construídas.

As atividades práticas são fundamentais para o desenvolvimento do pensamento geométrico, mas devem ser complementadas por estratégias didáticas que organizem o conhecimento de forma lógica e progressiva. Os resultados reforçam a importância de práticas que estimulem a visualização e o raciocínio lógico, contribuindo para a melhoria do ensino de geometria e para a formação de professores em diferentes níveis de ensino.

Espera-se que as análises e discussões apresentadas neste estudo possam contribuir para a melhoria de práticas pedagógicas no ensino de geometria, oferecendo novas perspectivas para a formação de professores e para o desenvolvimento das competências matemáticas nos diferentes níveis de ensino.

Referências

ARCAVI, A. Revisiting visual representations in mathematics education: issues and developments. In: LOMPSCHER, J.; SCHNEIDER, M. **Mathematics and cognition:** rethinking representation in math learning and teaching. New York: Springer, p. 43–61, 2021.

ARCAVI, A. The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 52, p. 215-241, 2003.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo.** São Paulo: Edições 70, 2011.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. 2. ed. Porto: Porto Editora, 1994.

CIFUENTES, J. C. Uma Via Estética de Acesso ao Conhecimento Matemático. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, v. 46, p. 55-72, 2005.

DUVAL, R. Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. In: PITTALUGA, J. (org.). **Semiosis in mathematics education.** Lyon: IREM de Lyon, p. 21–36, 2011.

FERREIRA, L. H. da C. **Desenvolvimento do pensamento geométrico com visualização de figuras espaciais por meio da metodologia de oficinas.** 2010. 137f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2010.

FLORES, C. R. **Olhar, saber, representar:** sobre a representação em perspectiva. São Paulo: Musa Editora, 2007.

FLORES, C. R.; WAGNER, D. R.; BURATTO, I. C. F. Pesquisa em visualização na educação matemática: conceitos, tendências e perspectivas. **Revista Educação Matemática e Pesquisa.** v. 14, n. 1, p. 31–45, 2012.

FROTA, M. C. R.; COUY, L. Estratégias para o ensino-aprendizagem de funções com um foco no Pensamento Visual. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, IV, Brasília, 2009. **Anais […]**. Brasília: SBEM, 2009.

HILBERT, D.; COHN-VOSSEN, S. **Geometry and the imagination.** New York: Chelsea Publishing Company, 1932.

KALEFF, A. M. R. **Vendo e entendendo poliedros:** do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos. Niterói: EdUFF, 2003.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, Intuição e Visualização:** a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de Licenciatura em Matemática. Tese (Doutorado em Educação, UFPR), Curitiba, 2009, 294p.

PRESMEG, N. Visualizing mathematics: The role of visualization in mathematical thought and learning. In: LERMAN, Stephen (org.). **Encyclopedia of mathematics education.** Dordrecht: Springer, p. 660–664, 2014.

RÊGO, R. G. do; RÊGO, R. M. do. **Matemáticativa II.** João Pessoa: Editora

Universitária/UFPB, 1999.

SKEMP, R. **Psicología del aprendizaje de las matemáticas.** 2. ed. Madrid: Ediçiones Morata, 1993.

TALL, D. **Advanced mathematical thinking.** Dordrecht: Kluwer, 1991.