revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Dá para dividir os sanduíches? Os registros de representação Semiótica e o material concreto na formação de professores

DOI: https://doi.org/10.33871/rpem.2025.14.34.10083

Elisandra Bar de Figueiredo[1]
Débora Eloísa Nass Kieckhoefel[2]
Juliana Elisa Hänsch[3]

Resumo: Até mesmo no ensino superior, as múltiplas formas de representar frações e a diversidade de seus significados podem ser um desafio. Assim, o presente texto explora os resultados obtidos a partir de um recorte de uma sequência didática no contexto da formação de professores, aplicada em duas turmas – uma de segunda e outra de quinta fase – do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública. Os resultados foram analisados pela perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, do uso de material concreto no ensino e da aprendizagem de frações. A sequência tinha como objetivo apresentar uma possibilidade para o ensino de frações com o uso de Barras de Frações (material concreto) e a Metodologia de Resolução de Problemas, além de averiguar as potencialidades e limitações do material desenvolvido. Nesse contexto, trazemos a análise dos dados coletados a partir dos recursos audiovisuais e registros escritos dos participantes, referentes ao primeiro problema gerador. Com base na análise de conteúdo de Bardin, foram delimitadas três categorias que nos possibilitaram compreender como os licenciandos transitam entre diferentes formas de registros de representação e como as Barras de Frações podem influenciar na resolução de problemas. Entre os resultados, podemos destacar que as barras serviram tanto para verificar soluções quanto para interpretar o problema. Observamos também, com exceções, que os licenciandos tinham domínio sobre procedimentos algébricos, mas tinham dificuldade na formação e na representação da situação nos outros registros.
Palavras-chave: Barras de Frações. Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Ensino superior. Análise de conteúdo.

Can the sandwiches be split? The semiotic representation registers and concrete materials in teacher training

Abstract: Even in higher education, the many ways to represent fractions and the plurality of their meanings can be a challenge. Thus, this article explores the results from an excerpt from a didactic sequence in the context of teacher training, applied in two classes – one in the second and another in the fifth semester – of the undergraduate program in Mathematics at a public university. The results were analyzed from the perspective of the Theory of Registers of Semiotic Representation, the use of concrete material in teaching and the learning of fractions. The goal of the sequence was to introduce a possibility for the teaching of fractions using fraction bars (concrete material) and the Problem-Solving Methodology, as well as to assess the potentialities and limitations of the developed material. In this context, this text brings an analysis of the data collected from the audiovisual resources and the participants' written notes referring to the first generating problem. Based on Bardin's content analysis, three categories were designed, which allowed us to understand how the undergraduate students transit between different representation register forms and how the fraction bars may influence problem solving. Among the results, we highlight that the bars were useful for both the verification of the

[1] Doutora em Ciências, Universidade do Estado de Santa Catarina. E-mail: elisandra.figueiredo@udesc.br - ORCID: https://orcid.org/0000--0003-2101-4009.
[2] Mestra em Educação Matemática, Universidade do Estado de Santa Catarina. E-mail: debora.kieckhoefel@udesc.br - ORCID: https://orcid.org/0009-0007-1421-1385.
[3] Licenciada em Matemática, Universidade do Estado de Santa Catarina. E-mail: julianaelisa2604@gmail.com - ORCID: https://orcid.org/0009-0004-9998-7243.

Revista Paranaense de Educação Matemática, Campo Mourão, PR, Brasil, v.14, n.34, p.01-27, mai.-ago. 2025.

solutions and the interpretation of the problem. We also observed that, with some exceptions, the students mastered algebraic procedures but had a difficult time with the formation and representation of the situation in the other registers.
Keywords: Fraction bars. Mathematics Teaching-Learning-Evaluation Method Through Problem Solving. Higher Education. Content Analysis.

1 Introdução

As múltiplas formas de representar o mesmo número racional e a variedade de significados de fração - formas de interpretá-las conforme o contexto no qual estão inseridas - são apontadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1997) como algumas das principais dificuldades enfrentadas pelos alunos da educação básica no processo de aprendizagem de frações. Assim, visando minimizar essas dificuldades e apoiadas na afirmação de Lorenzato (2012) de que, para chegar ao abstrato, é preciso partir do concreto, desenvolvemos uma pesquisa que elaborou atividades para o ensino de frações no ensino fundamental e na formação de professores de matemática com apoio de material concreto. Essas atividades partem da representação concreta, ou natural, e transitam entre diferentes registros de representação de forma coordenada, a fim de facilitar a visualização dos processos e, consequentemente, a abstração dos conceitos.

Ao aplicar as atividades no contexto da formação inicial de professores de matemática, tínhamos como objetivo apresentar uma forma de ensinar frações, usando Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP) e material concreto. Por outro lado, em termos de pesquisa, buscávamos avaliar as atividades de modo a identificar adaptações e melhorias necessárias visando a futuras implementações no âmbito do ensino básico. Contudo, após a aplicação, percebemos as dificuldades em transitar entre formas de representação como uma oportunidade para ampliar a compreensão dos alunos sobre frações e, em termos de pesquisa, foi possível lançar um olhar sobre essas dificuldades e o papel do material concreto.

Assim, neste artigo, ao descrever um recorte da aplicação feita no ensino superior, no contexto de formação de professores, visamos tecer considerações acerca da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, do uso de material concreto no ensino e da aprendizagem de frações. Para isso, por meio da análise de conteúdo de Bardin (Bardin, 2016), analisamos os dados coletados da resolução de uma das atividades, destacando as conversões e tratamentos realizados pelos alunos e como o material concreto fez-se presente nesse processo. Ainda, uma vez que a atividade foi mediada pela MEAAMaRP (Allevato e Onuchic, 2021), traremos apontamentos acerca do uso dessa metodologia.

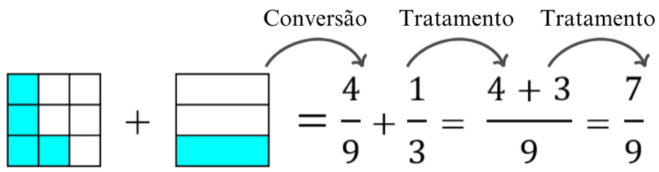
2 Fundamentação Teórica

A interpretação de frações abrange uma variedade de representações. De acordo com Duval (2009), cada uma delas é chamada de “registro”. Segundo o autor, “tais registros constituem os graus de liberdade de que um sujeito pode dispor para objetivar a si próprio uma ideia ainda confusa, um sentimento latente, para explorar informações ou simplesmente para poder comunicá-las a um interlocutor” (Duval, 2009, p.37).

Os registros de representações semióticas, conforme Duval (2012), admitem três atividades cognitivas fundamentais: a formação, o tratamento e a conversão. A formação de uma representação diz respeito à construção de uma expressão que possa ser reconhecida dentro de um determinado registro semiótico. Esse processo exige a seleção de informações relevantes e o respeito às regras específicas do registro, como normas gramaticais, formais ou de construção visual. Tais regras garantem a identificação da representação e possibilitam seu uso em tratamentos cognitivos, ainda que não assegurem, por si só, a competência do sujeito em produzi-la. Por exemplo, considere a afirmação: “duas de cinco pessoas em um grupo preferem bolo de chocolate a bolo de cenoura”. Para representar essa preferência, a formação de uma fração exige, primeiro, que se selecione a informação “duas” como a parte de interesse e “cinco” como o todo de referência. Em seguida, ao aplicar a regra do registro fracionário, constrói-se a expressão $\frac{2}{5}$, em que o numerador (2) representa a quantidade com a preferência e o denominador (5) representa o grupo total de comparação.

Além disso, Duval (2009, p. 39) define conversão como “uma transformação que faz passar de um registro ao outro”. Por exemplo, na Figura 1, ao transformarmos as figuras (registro figural) em números fracionários (registro numérico), estamos transitando entre diferentes registros e, portanto, realizando uma conversão. Enquanto isso, o tratamento é definido como “uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro” (Duval, 2009, p. 39). Logo, ao calcular a soma das frações, estamos transitando dentro de um mesmo tipo de registro (numérico), caracterizando um tratamento.

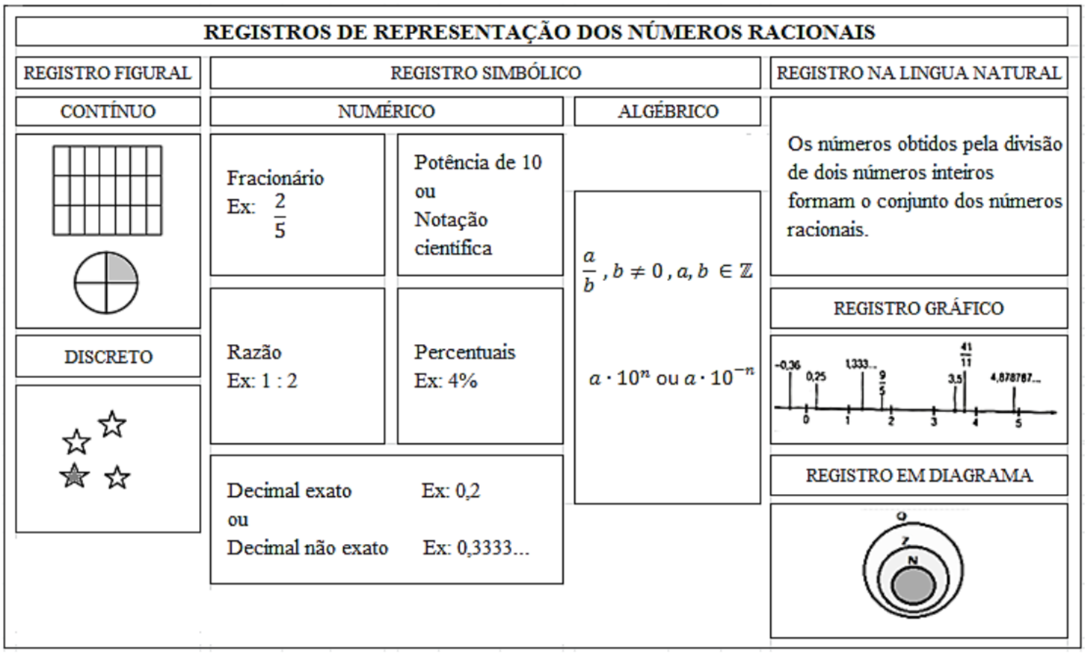
Figura 1: Exemplo de conversão e tratamento de registros



Fonte: Autoras (2024).

Nesse contexto, ele identifica quatro grandes tipos de registros: a linguagem natural, as línguas simbólicas, os gráficos e as figuras geométricas (Duval, 2009). Com base nisso, Miranda e Rezende (2017) afirmam que, ao considerar as diferentes representações dos números racionais, observa-se que eles podem ser representados, por exemplo, por figuras contínuas ou discretas, por registros simbólicos numéricos ou algébricos, pela língua natural, por gráficos ou, ainda, por diagramas, conforme exemplifica a Figura 2.

Figura 2: Alguns registros de representação semiótica dos números racionais



Fonte: Miranda e Rezende (2017, p. 51).

Além dessas, acrescentamos, como uma possível forma de representação, a concreta, quando feita por meio de objetos físicos manipuláveis. Ela diferencia-se das demais por não se tratar de um registro escrito/ilustrado, mas, sim, de uma forma de representar algo que seja possível manipular fisicamente.

De acordo com Duval (2012), recorrer a diferentes registros de representação contribui para que o estudante compreenda que eles não são o próprio objeto matemático, mas formas distintas de expressá-lo. Essa diversidade favorece o reconhecimento do mesmo conceito em representações variadas, fortalecendo a compreensão do objeto em si.

> A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão (Duval, 2012, p. 282).

Nesse sentido, o registro de representação concreto, por meio de materiais manipuláveis, pode facilitar a transição de registros mais simples para registros mais abstratos. Alinhado a essa perspectiva, Lorenzato (2012, p. 19) defende que a melhor forma de chegar ao abstrato é partir do concreto. Segundo ele, um material dinâmico que permite transformações por continuidade "facilita ao aluno a realização de redescobertas, a percepção de propriedades e a construção de uma efetiva aprendizagem".

Todavia, é necessário que a escolha e o uso do material didático estejam fundamentados em uma proposta pedagógica clara, de modo que ele funcione como um instrumento facilitador na construção do conhecimento. Como destaca Lorenzato (2012), o material didático deve ser utilizado de forma consciente, permitindo a articulação entre teoria e prática, e o professor deve atuar como mediador, conduzindo os alunos à reflexão e à abstração dos conceitos abordados.

Além de sua função de apoio ao ensino, o material didático também pode assumir diferentes papéis na aula, como motivar os alunos, apresentar um novo conteúdo, permitir a verificação de hipóteses ou consolidar aprendizagens. Contudo, sua eficácia não está garantida apenas pela sua presença. O que assegura sua funcionalidade pedagógica é o modo como é utilizado em sala de aula, sua pertinência em relação aos objetivos propostos e a mediação docente que acompanha sua aplicação (Lorenzato, 2012).

Nacarato (2005) aponta que, embora o discurso sobre a importância dos materiais concretos esteja disseminado entre professores dos anos iniciais, muitas vezes, sua utilização ocorre de forma acrítica, baseada na crença de que a simples manipulação do material garante a aprendizagem.

O que diferencia o material concreto é sua potencialidade de ser usado como ponte entre o concreto e o abstrato, viabilizando a aprendizagem por meio da experiência ativa. De acordo com Matos e Serrazina (1996), a construção de conceitos matemáticos é um processo que parte da experiência sensível e transforma-se, gradativamente, em abstrações. Os materiais concretos têm, nesse contexto, um papel fundamental, desde que sejam utilizados com intencionalidade e reflexão, mediados por um professor consciente dos objetivos da atividade.

Essa mediação docente é reiteradamente destacada na literatura. Fiorentini e Miorim (1990) alertam que muitos professores justificam o uso do material concreto apenas por seu caráter motivador ou por repetirem a ideia de que "ensinar matemática deve começar pelo concreto". Para os autores, o uso eficaz desses materiais depende de sua articulação com uma proposta pedagógica consistente, capaz de integrar a manipulação física à atividade mental e à abstração. Passos (2012) coloca que a abstração matemática exige mais do que o simples manuseio de materiais concretos. É preciso que o aluno internalize os conceitos, atribuindolhes significado. Nesse sentido, o aluno deve ser protagonista de sua aprendizagem, investigando, refletindo e construindo seu próprio conhecimento. O uso de materiais concretos, nesse contexto, pode ser um recurso valioso para facilitar a compreensão das múltiplas representações das frações.

Sob essa perspectiva, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP), associada ao uso de materiais concretos manipuláveis, tem potencial para auxiliar o aluno nesse processo, pois, nela, o aluno é o foco do processo de ensino-aprendizagem e "o professor estimula os alunos a compartilharem e justificarem suas ideias, defenderem pontos de vista, compartilharem e discutirem as diferentes soluções" (Allevato e Onuchic, 2021, p. 50). A partir das experiências de seu grupo de pesquisa, Allevato e Onuchic (2021) propõem um roteiro de dez etapas como referência para os professores implementarem a MEAAMaRP: proposição do problema; leitura individual; leitura em conjunto; resolução do problema; observação e incentivo; registro das resoluções na lousa; plenária; busca do consenso; formalização do conteúdo; e proposição e resolução de novos problemas. De acordo com as autoras, esse processo valoriza a autonomia dos alunos, promove o pensamento crítico e favorece a construção coletiva do conhecimento matemático. Elas ainda colocam que o roteiro não é rígido e pode ser adaptado conforme o contexto da aplicação, porém é imprescindível que não se perca a essência da metodologia que se concentra na discussão coletiva (momento da plenária) e na formalização do conteúdo (Azevedo; Figueiredo; Palhares, 2020).

Neste estudo, utilizamos a MEAAMaRP como abordagem metodológica para o estudo de frações com o apoio de materiais concretos. A seguir, detalhamos o contexto da aplicação realizada e os procedimentos para a análise.

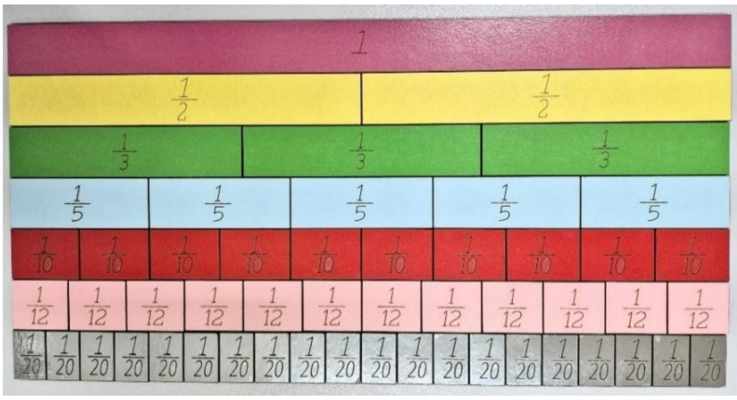
3 Procedimentos Metodológicos e Dinâmica da Aula

No contexto da formação de professores de matemática, elaboramos uma sequência didática na qual propusemos um estudo sobre frações mediado pelo uso de material concreto, a saber, as Barras de Frações, e com atividades fundamentadas na MEAAMaRP.

As Barras de Frações são inspiradas no material elaborado por Oliveira (2022), que confeccionou tiras de EVA representando um inteiro e as frações $\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}$ e $\frac{1}{15}$. Adaptamos essa ideia produzindo tiras de MDF com cores variadas, na máquina de corte a laser, seccionadas de modo a contemplar as frações de um inteiro até $\frac{1}{20}$, sendo o inteiro de tamanho

20 cm, servindo como parâmetro para as demais (Figura 3). Desse modo, ampliamos as frações disponíveis para uma maior versatilidade no uso e temos um material mais durável e de fácil replicabilidade (tendo-se acesso a uma máquina de corte a laser).

Figura 3: Barras de Frações



Fonte: Acervo das autoras (2023).

A sequência[4] era composta por nove atividades entre resolução e formulação de problemas e foi aplicada ao longo de oito horas/aula de 50 min cada. Neste artigo, apresentaremos e traremos a análise do primeiro problema gerador ao qual, ao longo do texto, nos referiremos apenas como problema gerador.

Participaram das atividades duas turmas do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública – uma da segunda fase e outra da quinta. Vale destacar que as aplicações não ocorreram simultaneamente. A primeira aplicação foi na turma da quinta fase e, a partir dela, percebemos a necessidade de adaptações (alteração de enunciados e disponibilização de massinha de modelar para usar na resolução dos problemas) que foram implementadas na aplicação posterior. Tínhamos, como hipótese, que, apesar de ser aplicada a mesma sequência para ambas as turmas, teríamos resultados e discussões distintos em função das experiências já vivenciadas por cada uma ao longo das disciplinas do curso. Por exemplo, na quinta fase, os alunos já cursaram disciplinas nas quais discutiram acerca de metodologias de ensino e tendências em Educação Matemática, enquanto, na segunda fase, estão tendo o primeiro contato com textos envolvendo didática e teorias de aprendizagem. Adiante, evidenciaremos algumas das diferenças observadas.

Com relação à aula, ela foi estruturada com base na MEAAMaRP, tendo início com uma explicação da dinâmica da sequência de atividades e seu contexto inserido num projeto de pesquisa desenvolvido pelas autoras. Depois, foram formados os grupos (de livre escolha,

[4] Sequência revisada disponível em http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/1001015

apenas com a indicação de número de participantes) e foram distribuídos o enunciado do problema gerador e o material concreto (Barras de Frações e massinha de modelar na segunda aplicação). Assim, a aplicação teve início com a leitura do problema em grupo (etapa 3 da MEAAMaRP). Na sequência, os alunos tentaram resolvê-lo seguindo estratégias diversas. Alguns tentaram passar da linguagem natural para a representação concreta com as Barras de Frações, outros tentaram a conversão para o registro numérico. A maioria teve dificuldades em relacionar a divisão dos sanduíches e o valor a ser pago por Cris para Jô e Pat. Enquanto os alunos buscavam estratégias, as pesquisadoras atuavam como mediadoras, instigando a verificação dos resultados e o uso de diferentes registros de representação para interpretação e resolução do problema (etapas 4 e 5). As equipes de alunos da quinta fase usaram 40 min para discutir e resolver o problema, enquanto as da segunda fase usaram cerca de 55 min. Em seguida, todas as equipes registraram a solução no quadro negro e explicaram o seu raciocínio. Ao final das apresentações, as equipes chegaram ao consenso sobre a resolução correta (etapas 6, 7 e 8).

Para concluir, a terceira autora fez a formalização (etapa 9 da MEAAMaRP), apresentando a resolução, enfatizando as conversões e tratamentos entre os registros de representação e discutindo o uso do material concreto nesse processo.

Durante a resolução do problema gerador, objeto deste artigo, foram obtidos dados de 12 licenciandos (quatro da segunda e oito da quinta fase) e da professora das disciplinas que, como os alunos, não conhecia a estrutura da sequência. Visando favorecer a troca de ideias entre os estudantes, eles foram separados em duplas ou trios formando seis equipes denominadas E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 e E_6, sendo as quatro primeiras de alunos da quinta fase e da professora regente e as outras duas de alunos da segunda fase. As três autoras deste texto atuaram como professoras/pesquisadoras durante toda a aplicação. Ao longo do texto, usaremos as seguintes nomenclaturas: para nos referirmos aos participantes da pesquisa, $A_1, \cdots, A_{13}$; à professora[5], P; às pesquisadoras, P_1 para a primeira autora, P_2 para a segunda e P_3 para a terceira.

A coleta de dados foi realizada por meio de gravações de vídeo, fotos e áudio das aulas, além dos registros escritos das resoluções feitas por cada grupo, com a autorização de todos os participantes, obtida por meio de um termo de consentimento.

Para os procedimentos de análise, adotamos a análise de conteúdo de Bardin, que é definida como

[5] Ressaltamos que a professora da turma aparece com papéis diferentes: como participante na primeira aplicação e como professora na segunda.

> um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/ recepção (variáveis inferidas) dessas mensagens. (Bardin, 2016, p. 48).

Temos, portanto, que a análise de conteúdo compreende um vasto campo que engloba as comunicações, podendo ser aplicada às entrevistas, aos documentos oficiais, aos vídeos, aos registros escritos, às notícias etc. Além disso, a análise de conteúdo é adaptável ao objetivo do pesquisador que a utiliza e apresenta uma gama de possibilidades na escolha dos procedimentos, conferindo certa "liberdade" nesse processo. Contudo, Bardin (2016) enfatiza que a escolha desses procedimentos deve ser rigorosa e objetiva, uma vez que está fundamentada no objetivo e nas hipóteses iniciais do pesquisador. Tendo isso em vista, apresentamos, a seguir, os procedimentos de análise que adotamos.

Diante da grande quantidade de dados obtidos a partir das nove atividades propostas durante a sequência aplicada, torna-se inviável a apresentação da análise e discussão dos resultados num único artigo. Sendo assim, como já exposto, para este texto, debruçamo-nos sobre a análise do problema gerador:

> Jô, Pat e Cris resolveram fazer um piquenique e combinaram levar sanduíches para o almoço. Jô levou 3 sanduíches, Pat levou 2 e Cris se esqueceu do combinado e não levou nenhum. Assim, resolveram repartir os sanduíches que tinham levado igualmente entre as três, mas cobraram de Cris R$ 5,00 por sua parte. Que parte dos R$ 5,00 recebeu Jô? E Pat? (Onuchic; Allevato, 2008, p. 89).

Assim, partimos para a pré-análise, que é a fase de organização na qual objetiva-se sistematizar as ideias iniciais a partir da "*escolha dos documentos* a serem submetidos à análise, a formulação das *hipóteses* e dos *objetivos* e a elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final" (Bardin, 2016, p. 125, grifo do autor).

Num primeiro momento, estávamos interessadas em observar quais os registros de representação utilizados pelas equipes na resolução do problema, bem como o papel do material concreto nos procedimentos adotados. Diante desse objetivo, propusemo-nos a responder à pergunta: de que forma aparecem os registros de representação nas resoluções e discussões dos alunos e como o material concreto faz-se presente nesse processo? Tínhamos, como hipótese, que o material concreto serviria de apoio na interpretação do problema e, com isso, facilitaria os processos de conversões e tratamentos necessários para a sua resolução.

Os documentos escolhidos para compor a análise foram os registros escritos das resoluções das equipes, as gravações em vídeo e áudio, bem como fotos tiradas ao longo das atividades.

Ainda na fase de pré-análise, elaboramos um plano que estabeleceu de que forma seria feita a codificação dos dados, entendendo que “a codificação é o processo pelo qual os dados brutos são transformados sistematicamente e agregados em unidades, as quais permitem uma descrição exata das características pertinentes do conteúdo” (Holsti, 1969 *apud* Bardin, 2016, p. 133). Essas unidades, chamadas de unidades de registro, armazenam o significado, a base do conteúdo analisado, e viabilizam a posterior categorização.

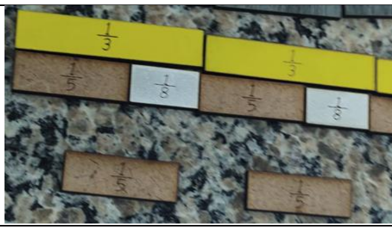
A fim de elencar as unidades de registro, definimos que, ao olhar para os registros escritos das resoluções dos alunos a partir da pergunta motriz, destacaríamos recortes que apresentassem conversões e/ou tratamentos, ou o uso do material concreto. Os vídeos, áudios e fotos serviriam de complemento para a análise dos registros escritos.

Partimos, então, para a fase de exploração do material, organizada em quadros como o exemplo dado no

Quadro ***1***. O número subscrito no código da unidade representa a equipe responsável por aquele registro, enquanto o número entre parênteses é a ordem do recorte daquela equipe que está sendo analisada. Assim, a unidade $E_5(2)$ refere-se ao segundo recorte analisado da equipe 5. A segunda linha é composta por um recorte da resolução escrita dos alunos ou foto tirada enquanto resolviam a atividade. A terceira linha expressa as conversões e tratamentos realizados no registro, enquanto a quarta traz observações acerca do material concreto naquele recorte. Por fim, é feita uma articulação das informações contidas nas linhas anteriores.

Ao final do processo expresso no Quadro 1, partimos para o tratamento dos resultados, interpretando-os de modo a torná-los significativos. Para isso, fizemos uso da categorização, entendendo que “as categorias são rubricas ou classes, as quais reúnem um grupo de elementos (unidades de registro, no caso da análise de conteúdo) sob um título genérico, agrupamento esse efetuado em razão das características comuns destes elementos” (Bardin, 2016, p. 147).

Quadro 1: Exemplo de análise das unidades de registro.

Código da Unidade	$E_5(2)$
Recorte destacado	
Registros de Representação Semiótica	Conversão da linguagem natural para a representação concreta e tratamento na representação concreta.
Material Concreto	Usou o material para fazer a conversão da linguagem natural para o registro concreto, na divisão dos sanduíches.

Articulações da Análise	Tentou encontrar uma peça para encaixar no espaço ao lado do $1/5$ que resultasse em $1/3$. Fez por tentativa e erro, sem pensar num valor numérico que fizesse sentido.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Assim, a partir das unidades de registro, os elementos comuns que emergiram das articulações da análise constituíram as categorias que denominamos: C_1, (Falta de) compreensão do conceito de fração; C_2, Domínio dos tratamentos no registro numérico e algébrico, mesmo que com interpretação incorreta; e C_3, Material como suporte na interpretação do problema ou verificação do resultado. Vale destacar que as categorias não são excludentes, ou seja, um mesmo recorte pode estar em mais de uma. Na próxima seção, trazemos a interpretação e as inferências que fizemos acerca de cada uma dessas categorias.

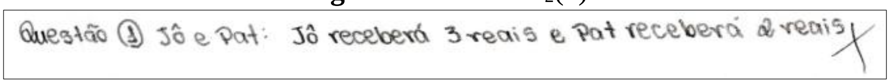
4 Análise e Discussão dos Resultados

Detalharemos, a seguir, cada uma das categorias que emergiram da análise, explorando aspectos das resoluções das equipes que envolvem tanto o conhecimento matemático e o domínio das operações realizadas quanto o papel e a utilização do material concreto nesse processo. Tínhamos previsto 50 min para a resolução desse problema e, nesse tempo, os alunos usaram várias estratégias. Os recortes apresentados correspondem ao registro de alguma dessas tentativas de resolução.

Na categoria 1 (C_1), nomeada como "(falta de) compreensão do conceito de fração", estão englobados recortes das resoluções que dizem respeito à compreensão do que é uma fração e como usá-la para representar a situação problema proposta. Nos recortes de algumas equipes, a frágil compreensão do conceito de fração manifesta-se em dificuldades na formação de uma representação semiótica adequada ao problema, enquanto, em outras, o conhecimento consolidado permite que essa atividade cognitiva ocorra sem maiores empecilhos.

Quando lemos o problema gerador, podemos ser induzidos a pensar que, se Cris pagou R$ 5,00, Jô contribuiu com 3 e Pat com 2 sanduíches, Jô deveria receber R$ 3,00 e Pat R$ 2,00. Foi exatamente essa a resposta que E_2 apresentou rapidamente, sem preocupar-se em fazer cálculos ou justificar essa solução, como podemos ver na Figura 4.

Figura 4: Recorte E_2(1)


Questão 1 Jô e Pat: Jô receberá 3 reais e Pat receberá 2 reais

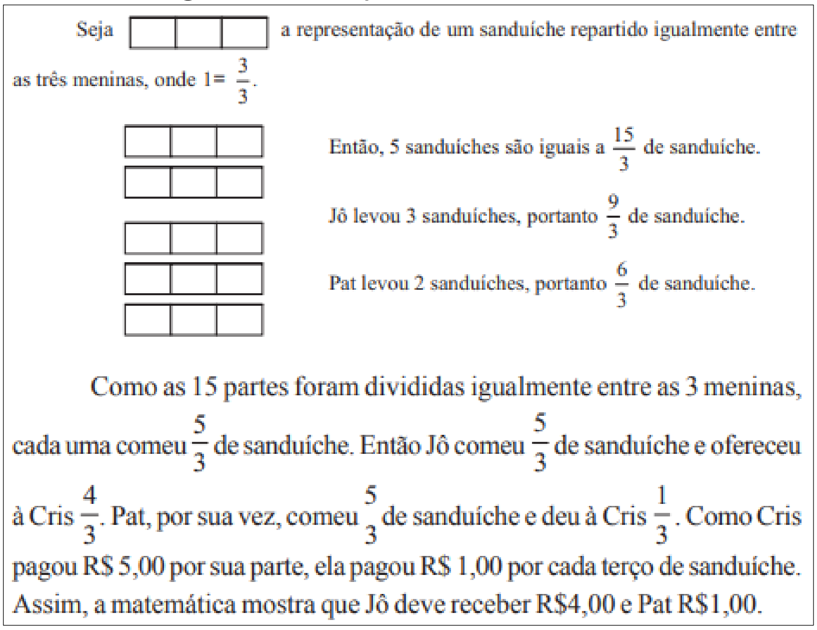
Fonte: dados da pesquisa (2024).

Essa mesma resolução foi indicada por outras equipes. Por exemplo, E_5 insistiu que o resultado era esse e não precisava fazer mais nada, como vemos no diálogo a seguir.

> A_{10}: Vai ter uma proporção... Dois e cinquenta para cada um, né?
> A_{11}: Não, porque a Jô levou três sanduíches e a Pat levou dois.
> A_{10}: Ah, entendi.
> A_{11}: Não faz sentido que elas recebam da mesma quantidade, entendeu?
> A_{10}: Esqueci disso, é isso que ele está perguntando, exatamente. Tá, então... Aí que está. Como é que faz agora?
> A_{11}: Dá para resolver em uma regra de três. Só que eu só não consegui visualizar.
> A_{10}: Como é que monta isso?
> A_{11}: Aham. Cara, a criança vai receber cinco terços de sanduíche.
> A_{10}: Assim, ó. Cinco é cem por cento. Né? Três é x. Daí a gente multiplica o percentual que der pelos cinco reais. Trezentos dividido por cinco. Cinco vezes seis é 30. Quanto é o valor? Sessenta. Sessenta por cento, então. [...] É, sessenta sobre cem vezes cinco.
> A_{11}: É porque são cinco sanduíches. Também são cinco reais.
> A_{10}: Trinta. Trinta sobre dez. Três reais.
> A_{11}: Ah, são três reais. A gente nem precisava ter feito essa conta, né?
> A_{10}: Aham.
> A_{11}: Um real por sanduíche. [...]
> A_{10}: Tá, a resposta está aí. Preciso montar com as pecinhas? Não, não necessariamente.
> P: Conseguem desenhar com pecinhas?
> A_{11}: É que eu não usei fração. A gente não usou fração.
> A_{10}: A gente usou álgebra, calculinhos.
> P_1: Vocês fizeram isso, e agora pensando com representação pictográfica, ou que seja com desenho, ou com as barras de frações, ou com as massinhas de modelar, vocês conseguiriam fazer essa relação?
> A_{11}: Então, o que que acontece, o problema no fato, da gente não ter usado as pecinhas, ou qualquer outro modo de representação, foi pelo fato do valor que eles receberam pelos sanduíches e a quantidade de sanduíches era a mesma.

Contudo, a solução do problema precisa considerar que Jô e Pat não venderam os sanduíches que trouxeram para Cris, mas também comeram parte deles. Assim, a fim de aprofundar as reflexões sobre C_1, faz-se necessário apresentar a solução para o problema gerador. Uma das soluções possíveis é apresentada por Onuchic e Allevato (2008) e está exposta na Figura 5.

Figura 5: Resolução do Problema Gerador



Seja a representação de um sanduíche repartido igualmente entre as três meninas, onde $1 = \frac{3}{3}$.

Então, 5 sanduíches são iguais a $\frac{15}{3}$ de sanduíche.

Jô levou 3 sanduíches, portanto $\frac{9}{3}$ de sanduíche.

Pat levou 2 sanduíches, portanto $\frac{6}{3}$ de sanduíche.

Como as 15 partes foram divididas igualmente entre as 3 meninas, cada uma comeu $\frac{5}{3}$ de sanduíche. Então Jô comeu $\frac{5}{3}$ de sanduíche e ofereceu à Cris $\frac{4}{3}$. Pat, por sua vez, comeu $\frac{5}{3}$ de sanduíche e deu à Cris $\frac{1}{3}$. Como Cris pagou R$ 5,00 por sua parte, ela pagou R$ 1,00 por cada terço de sanduíche. Assim, a matemática mostra que Jô deve receber R$4,00 e Pat R$1,00.

Fonte: Onuchic e Allevato (2008, p. 89).

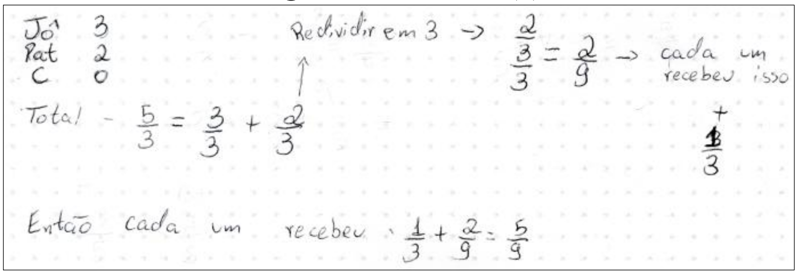
Se resolvesse dessa forma, o aluno passaria por algumas etapas para encontrar a solução. Primeiro, teria que determinar um novo referencial que facilitasse a divisão dos cinco sanduíches entre as três meninas, já que a divisão $\frac{5}{3}$ gera uma dízima periódica, 1,66666... sanduíches, inviabilizando os cálculos. Pela solução apresentada na Figura 5, o todo passa a ser composto por 15 pedacinhos de sanduíche e não mais cinco sanduíches inteiros. Vale destacar que essa é uma das formas de solução e, utilizando frações equivalentes, podemos encontrar outras representações para o todo. Assim, após estabelecer esse novo referencial, o aluno precisaria entender qual parte do todo cada uma comeu e, consequentemente, determinar com quanto – em termos de sanduíche – cada uma contribuiu. O último passo seria converter essa quantidade de sanduíche em valores monetários para solucionar o valor a ser recebido por cada uma delas.

De modo geral, a grande dificuldade deu-se no primeiro passo da resolução, que era determinar um referencial mais adequado para realizar a divisão dos sanduíches. Aqui, os licenciandos deveriam formar uma representação identificável que fosse capaz de descrever o problema. Todas as equipes compreenderam que cada uma comeria $\frac{5}{3}$ do total de sanduíches, mas os procedimentos seguintes envolveram erros de formação variados, que as impediam de descrever corretamente a situação desejada.

Na Figura 6, vemos que E_1 extraiu do enunciado a fração $\frac{5}{3}$, que descreve corretamente a divisão dos cinco sanduíches entre as três meninas. Fazendo um tratamento, decompuseram

$\frac{5}{3}$ como $\frac{3}{3}+\frac{2}{3}$, que, em termos de sanduíche, representaria um sanduíche para cada uma mais um pedaço referente à divisão dos outros dois. No entanto, as próximas etapas revelam erros de formação. De forma equivocada, redividiram as frações $\frac{3}{3}$ e $\frac{2}{3}$ em três, encontrando a fração $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$, mostrando que não compreenderam que a fração $\frac{5}{3}$ já representava a divisão entre as três.

Figura 6: Recorte $E_1(1)$

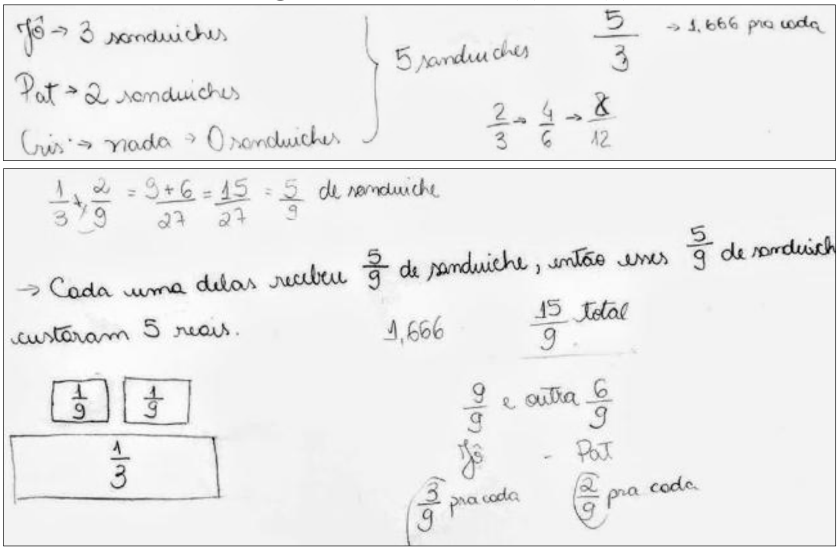


Fonte: dados da pesquisa (2024).

Quando nos debruçamos sobre a discussão da resolução de E_3, vemos que rapidamente concluem que cada uma receberia $\frac{5}{3}=1{,}6666\ldots$ de sanduíches, como vemos na Figura 7(a). Induzidos por esse valor, para representar os sanduíches nas Barras de Frações, usaram cinco barras de $\frac{1}{3}$, sem perceber que $\frac{5}{3}$ não era o todo e, sim, a parte que cada uma consumiu. Com essa representação estabelecida, naturalmente os demais cálculos geraram o resultado incorreto. Uma vez que a "formação implica seleção de relações e de dados no conteúdo a representar" (Duval, 2012, p.271), fica evidente que, ao representar $\frac{5}{3}$ como o todo, há um problema de formação. Isso decorre do fato de que a equipe não foi capaz de interpretar o que os números encontrados representavam, não conseguindo, portanto, estabelecer uma relação satisfatória com os dados do enunciado.

Da mesma forma que E_1, entenderam que cada uma deveria receber um sanduíche $\left(\text{na representação usada por eles, um sanduíche } =\frac{1}{3}\right)$ mais um pedaço que seria dado pela divisão dos dois sanduíches restantes $\left(\frac{2}{3}\right)$ pelas três meninas, logo $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}$, como podemos ver na Figura 7(b). Ainda, concluíram que $\frac{5}{9}$ de sanduíche custavam R$ 5,00. No diálogo a seguir, vemos a linha de pensamento de E3 para determinar o valor que Jô e Pat deveriam receber.

Figura 7: Recortes $E_3(2)$ e $E_3(3)$



(a)

(b)

Fonte: dados da pesquisa (2024).

> A_7: Então, cada uma delas recebeu cinco nonos de sanduíche.
> A_5: E cinco nonos de sanduíche custa cinco reais. Mas então, todos os sanduíches, quinze sobre nove, que é a mesma coisa que cinco sobre três.
> A_7: Calma, deixa eu escrever aqui que eu não tô acompanhando.
> A_5: Então, custou quinze reais todos os sanduíches. São cinco sandubas. Então, a fulana vai ganhar nove reais e a outra vai ganhar seis reais.
> A_7: É o quê? Não, mas é que parte dos cinco reais. Como é que ela recebeu nove? Calma.
> A_5: Ah, dos cinco reais. Então, uma vai receber três e a outra dois.
> A_7: É, porque uma levou, entrou com três, entrou com dois. Faz sentido pra mim.
> A_5: Não, vou pensar assim, ó.
> A_7: Mas aí, por que a gente tem que calcular os cinco nonos?

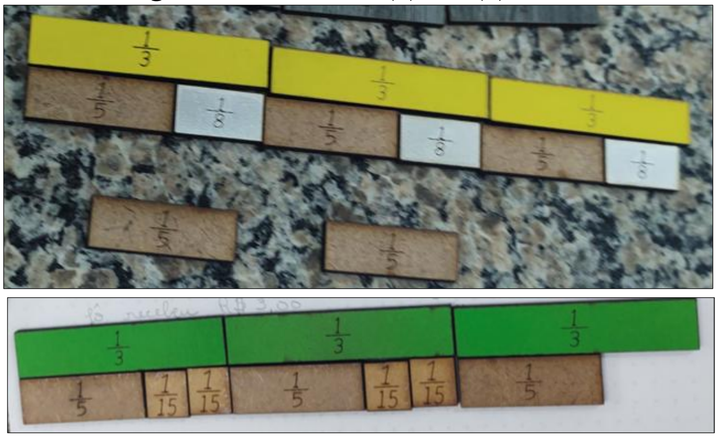
A partir daí, a equipe desconfiou que estava fazendo algo errado e refez o exercício, mas sempre usando $\frac{5}{3}$ como o todo. Mesmo que, inicialmente, tenham explicitado que cada uma receberia $\frac{5}{3} = 1{,}6666$ de sanduíche, não conseguiram perceber que tinham estabelecido incorretamente o referencial e que a conclusão posterior, $\frac{5}{9}$, contradizia o valor inicial. Aqui, fica claro que a dificuldade decorreu da interpretação equívoca de qual seria a quantidade de sanduíche que cada uma havia comido. Portanto, houve uma dificuldade na formação desse referencial. Fica a dúvida se usaram o $\frac{5}{3}$ como todo por distração ou por falta de domínio do conceito de fração. Eles discutem e, mesmo pensando em outras estratégias, sempre voltam ao mesmo ponto, sendo essa, inclusive, a resolução que compartilham com os colegas no final.

Ainda com relação à conversão entre registros, foi possível identificar que E_5 também apresentou dificuldades que, entendemos, provêm da falta de domínio do conteúdo de frações.

Essa equipe era composta por membros que não tinham afinidade entre si, o que ficou evidenciado durante a atividade quando um deles não levava em conta as ideias do outro, de modo que não caminhavam juntos na mesma ideia de resolução. Parecia que estavam num cabo de guerra de estratégias.

Essa equipe tinha resolvido o problema usando a proporção (errada), como destacamos no diálogo no início dessa seção, e, instigados pelas pesquisadoras, buscaram uma representação nas Barras de Frações que justificasse a resposta dada inicialmente por eles. Usaram as barras de $\frac{1}{3}$ para representar Pat, Jô e Cris, e as barras de $\frac{1}{5}$ para representar cada um dos cinco sanduíches, como podemos ver na Figura 8.

Figura 8: Recortes $E_5(2)$ e $E_5(1)$



(a)

(b)

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Pelo diálogo que segue, vemos que um dos membros de E_5 tentou encontrar uma peça que “encaixasse”.

> A_{10}: Eu tenho que achar a conta aqui. Ó, o nono pode ser que dê. Vamos ver o nono. Chega perto. Não é um nono, então é um oitavo. Tô inventando moda.
> P_1: Não, eu acho que tu estás pensando certo. Tu estás tentando dividir.
> A_{10}: Meu, ficou muito perto. [...] Chegou muito próximo.
> P: Mas eu estou vendo daqui que está faltando um pedacinho do sanduíche aí.
> [...]
> A_{10}: É um sétimo. Vamos ver.
> P_1: Se fosse em termos de conta, o que você teria que fazer com esse cara daqui? Com esses dois daqui?
> [...]
> A_{10}: É um quinto mais x igual a um terço. Tem que ser assim, né?

Ele queria saber quanto faltava em $\frac{1}{5}$ para completar $\frac{1}{3}$ (Figura 8 (a)), mas, por conta própria, não pensou em fazer a conta ou analisar algum valor que fizesse sentido, matematicamente falando. Para nós, essa dificuldade na conversão do registro concreto para o numérico parece demonstrar falta de domínio sobre os conceitos de fração. Na Figura 8(b), vemos a solução encontrada pelo outro membro da equipe, que realizou os cálculos dizendo "A_{11}: e agora, você tem que dividir um quinto por três, aí você vai chegar no resultado que você quer", demonstrando um conhecimento matemático mais consolidado.

Apesar de ter chegado na fração da divisão dos sanduíches, segue convicto que não precisava dele, pois já tinha a resposta para o problema: "A_{11}: E agora eis o questionamento: Por que a gente fez tudo isso? Porque a questão está perguntando cinco reais do dinheiro e essa parte a gente já respondeu" – referindo-se à proporção calculada inicialmente. A professora da turma faz um questionamento que resulta nas discussões e reflexões do diálogo a seguir:

> P: Mas se eu cobro um real para cada sanduíche e elas levaram cinco e elas cobraram da Pat cinco reais, mas o que elas comeram junto? Porque a coitada que não levou, ela não comeu cinco sanduíches, eu não sei se estou querendo me fazer clara, porque eu não estou conseguindo. [...] Se eu passar três e dois, eu acho que a coisa não está bem certa.
> A_{11}: É, eu entendi o que você quis dizer, a gente não pode considerar os cinco um real para cada sanduíche porque ela não pagou pelos cinco sanduíches, ela pagou pelos sanduíches que ela comeu.

Depois de perceberem que, realmente, a solução inicial não era coerente, eles concluem que precisam descobrir quanto de sanduíche cada menina comeu e, para isso, decidem somar as quantidades conforme a divisão feita na Figura 8(b). Porém, ao fazerem isso, voltam ao valor de um terço, com o qual ficam inconformados: "A_{11}: Ela comeu ... hum ... não espera aí, essa conta não está fechando. Um terço de sanduíches ela comeu, mas isso era óbvio desde o início né. Eu fiz toda uma conta mentalmente, para chegar ao que eu tinha no início?" Percebemos a dificuldade que eles têm em transferir a informação sobre a quantidade que cada menina comeu para a relação a ser paga. Além da dificuldade, por vezes percebe-se um bloqueio em querer admitir que a solução não estava correta e buscar uma estratégia diferente de solução. Nisso, percebemos que a metodologia fez diferença, pois os questionamentos da professora e das pesquisadoras fizeram os alunos pensarem sobre o resultado.

Essa mediação também mostrou-se muito importante no processo de resolução de E_6. O registro da solução deles, mostrado na Figura 9, não é capaz de expressar as dificuldades enfrentadas por essa equipe ao longo da resolução. A gravação de áudio revela que esse grupo apresentou grande dificuldade em operar a transformação da dízima periódica em fração, e a transformação de fração imprópria para fração mista, ainda que usassem suas calculadoras como suporte. Um indício disso encontra-se no diálogo entre seus integrantes e uma das pesquisadoras, expresso a seguir.

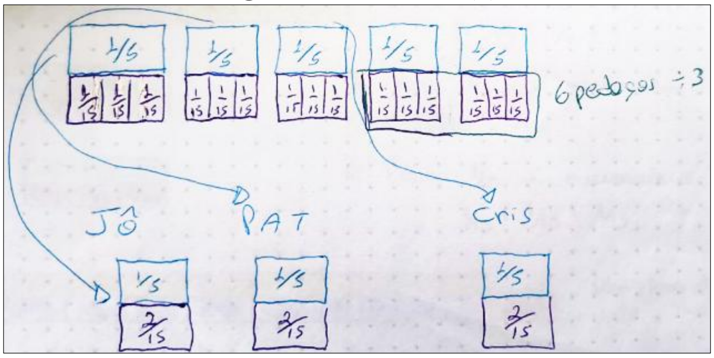
A_{12}: A gente tem um total de 5, mas elas estão em 3, então a gente pode dividir primeiro os 5 para 3, que vai formar a fração, né?
A_{13}: É, 5 por 3, fácil.
A_{12}: Vai ser por 6, que é 18. Aí sobra 2, vai ser 6, 6, 6, 6, 6. Agora coloque isso em forma de fração. Pode usar a calculadora. [...]
A_{13}: 1,6 em fração, 16 sobre 10. Porque 16 dividido por 10 dá 1,6. Como seria vários 6, aí teria que ser, na verdade, quantos 6 tu colocar aqui, tem que colocar aqui. Então, 166 dividido por 100, né? 166 dividido por 100. É, tem que colocar cada um. Ah, não sei, é isso.
A_{12}: Vamos ver se é um. Na verdade, dá, ah ta, ele me dá um inteiro e dois terços.
A_{13}: Hum, então o teu é diferente. Um inteiro e dois terços.
[...]
P_3: E da onde que vocês tiraram os 16 décimos?
A_{12}: Da divisão de 5 dividido por 3, que dava 1,66. Aí a gente achou 16 sobre 10. Aí a gente adotou o 16 e colocou ali.
A_{13}: É, porque são 5 sanduíches divididos por 3 pessoas. Aí dá 1,666666.
[...]
P_3: Sim, mas isso aqui é uma dízima, não é? 1,6666666.
A_{12}: É.
P_3: Então por que que tá 16 sobre 10?
A_{12}: Porque foi o que a calculadora falou.

Ainda, A_{13} explicita uma incompreensão da dízima periódica no contexto do sanduíche ao dizer “Isso aqui então não pode dar dízima periódica”, ao passo que P_3 questiona “Por que não pode?”. A_{13} rapidamente responde “Porque não tem como eu chegar. Se é o sanduíche não tem. Pra eu dividir certinho eu tenho que chegar no número no corte exato”.

Por outro lado, essa equipe escolheu adequadamente as peças de $\frac{1}{5}$ para representar cada sanduíche e entendeu que cada uma receberia um sanduíche mais “um pedacinho”. Logo, precisavam encontrar uma fração que representasse a divisão de dois sanduíches $\left(\text{na representação usada por eles: } \frac{2}{5}\right)$ entre três pessoas. Novamente, esbarraram na dificuldade com frações, pois, para realizar essa divisão, testaram pedacinhos e foi necessário o direcionamento das pesquisadoras para que concluíssem que, ao invés de testar, poderiam fazer o cálculo, e que $\frac{2}{5} \div 3 = \frac{2}{15}$. Vale pontuar que, novamente, não conseguiram prosseguir sozinhos, precisando de auxílio da pesquisadora que, por meio de perguntas, direcionou a manipulação do material até chegar na representação da Figura 9.

revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Figura 9: Recorte $E_6(3)$

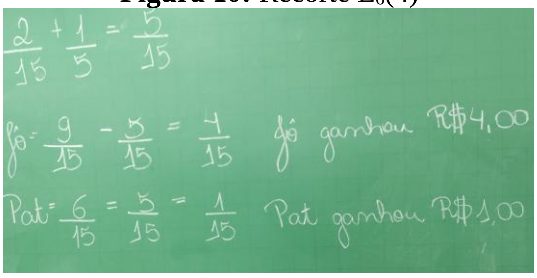


Fonte: dados da pesquisa (2024).

Em seguida, ainda com direcionamento, conseguiram entender a parte que cada uma deu para Cris e relacionar com o valor monetário. Porém, antes da plenária, A_{12} fala "A_{13} você quer explicar? Porque eu não sei explicar". Parece que, ao longo da explicação – apresentada no diálogo a seguir e exposta no quadro (Figura 10) – ambos vão tomando consciência dos processos realizados a partir da mediação da pesquisadora e a resposta encontrada passa a fazer sentido para eles.

> A_{13}: Então, a nossa linha de raciocínio chegou... É que a gente utilizou... A gente pegou mais os quadradinhos. Então a gente pegou... São 5 sanduíches, então a gente pegou 1 quinto. E daí a gente acabou dividindo 1 para cada. E daí desse 1 quinto a gente queria achar alguma coisa que fosse proporcional, que fechasse bem certinho esses dois sanduíches que sobraram. Então a gente achou as pecinhas de 1 sobre 15. Daí a gente acabou que cada um comeu 1 quinto mais 2 quinze avos.
> A_{12}: Tudo pelos quadradinhos das frações.
> A_{13}: É, das frações. Aí vendo pelo que cada menina levou ali pelos pedacinhos a gente pegou esse menos o que elas comeram. E a gente chegou nessas proporções aqui. Foi isso. Daí 4 reais e 1 real.

Figura 10: Recorte $E_6(4)$

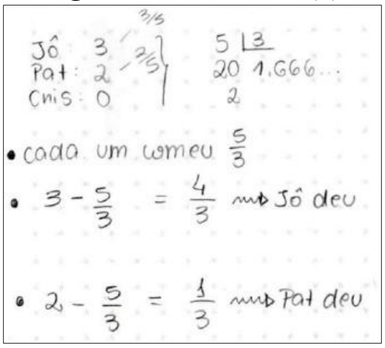


Fonte: dados da pesquisa (2024).

Algumas equipes não usaram o material para resolver o problema. Por exemplo, E_4 demonstrou muita facilidade ao resolver o problema usando apenas a conversão para o registro numérico. Ao perceber que a divisão não daria exata, logo relacionou a quantidade que cada uma deu com quanto consumiu, calculando a parte que cada uma tinha dado para Cris (Figura

11) e convertendo esse número para unidades monetárias.

Figura 11: Recorte E_4(1)

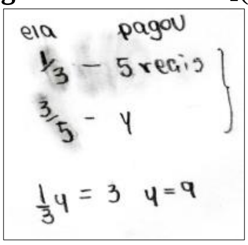


Fonte: dados da pesquisa (2024).

Esse último recorte aparece também na categoria 2 (C_2), a qual chamamos de “domínio dos tratamentos no registro numérico e algébrico mesmo que com interpretação incorreta”. Com algumas exceções, a análise evidenciou que os alunos dominam os tratamentos nos registros numérico e algébrico, ou seja, eles sabem realizar as operações, os cálculos, ainda que estes não façam sentido no contexto do problema.

Na Figura 12, temos outro exemplo de C_2, no qual a equipe realiza corretamente os tratamentos no registro algébrico, mas não consegue fazer a conversão para a linguagem natural e interpretar o significado do valor encontrado para o problema. Entendemos que a ideia de E_2 foi que $\frac{1}{3}$ das meninas (Cris) pagou R$ 5,00 e Jô levou $\frac{3}{5}$ dos sanduíches, logo teriam uma relação do quanto Jô pagou pela parte dos sanduíches que levou, que seria R$ 9,00. Assim, deveria receber R$ 4,00 (R$ 9,00 – R$ 5,00) de Cris, porém a equipe não conseguiu estabelecer essa relação final. Vale destacar que essa equipe também não fez uso do material, tentando resolver a questão apenas algebricamente.

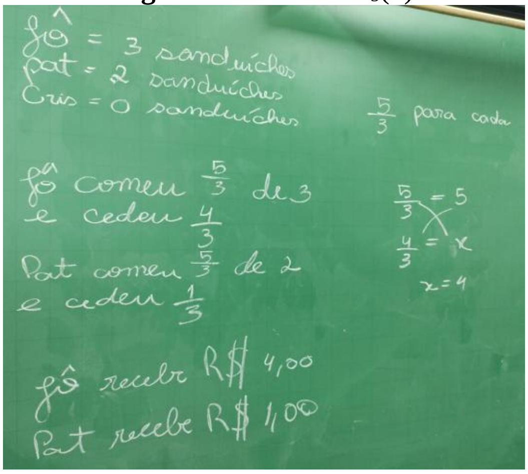
Figura 12: Recorte E_2(3)



Fonte: dados da pesquisa (2024).

E_5, depois de estabelecer a relação no material concreto, como mostra a Figura 8(b), e ser desafiada pela professora a repensar a sua solução, conseguiu relacionar a divisão dos sanduíches com o valor a ser pago (Figura 13), evidenciando mais uma vez que realizar os cálculos não representa um problema e que tem domínio nesse tipo de tratamento.

Figura 13: Recorte $E_5(3)$



Fonte: dados da pesquisa (2024).

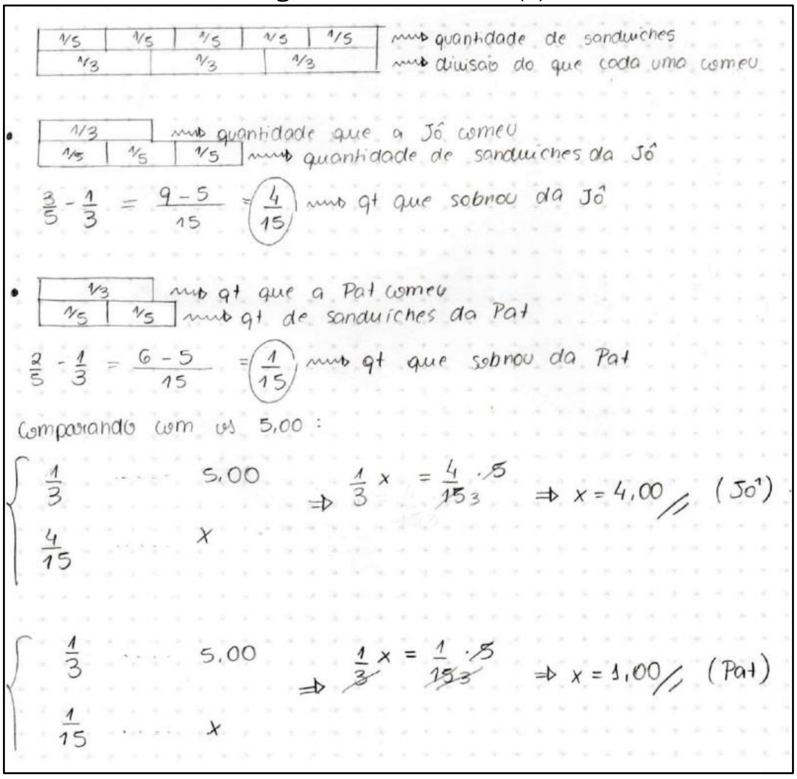
Por fim, a última categoria diz respeito ao uso dos materiais. Alguns dos recortes já foram apresentados ao longo da discussão de C_1, e lá destacamos o que esse uso diz da compreensão de fração. Pela análise, concluímos que o material serviu para dois fins: como suporte na interpretação e resolução do problema e para a verificação do resultado.

Na Figura 8(a) e na discussão de E_5, percebe-se que o aluno testou hipóteses buscando peças que "encaixavam" e, a cada tentativa, buscava identificar se estava mais próximo do resultado desejado. Ao transitar entre um problema escrito na linguagem natural e o material concreto, seu foco recaiu sobre as manipulações realizadas no material de modo a encontrar uma outra representação para o problema inicial. No momento da manipulação do material, não importava se o problema tratava de sanduíches, pizzas ou chocolates, importava apenas realizar tratamentos (ainda que não tivesse consciência do processo que estava realizando) para, então, compreender o que essa nova representação dizia sobre o problema inicial. Nesse sentido, o material serviu como apoio para a interpretação e resolução do problema gerador.

A mesma dinâmica fica evidente com E_6 (Figura 9) que, mesmo apresentando dificuldades conceituais sobre frações, usou o material para visualizar e organizar sua resolução.

Por outro lado, E_4 resolveu o problema com facilidade, transitando da linguagem natural para a numérica e fazendo o tratamento no registro numérico, visto na Figura 11, depois usando o material para verificar o resultado. O desafio estava em realizar corretamente os tratamentos no registro concreto e, apesar dos valores numéricos não se manterem os mesmos da resolução feita sem o material, a equipe compreendeu a divisão do todo, como podemos observar na Figura 14.

Figura 14: Recorte E4(3)



Fonte: dados da pesquisa (2024).

Ainda, E_2, num primeiro momento, apresentou uma resolução errada usando a interpretação direta, concluindo que Jô receberia R$ 3,00 e Pat R$ 2,00, como vimos na Figura ***4***. Pela conversa: "A_4: É que isso aqui tá parecendo muito simples, realmente, a resposta, mas eu não sei. A_3: Não, exato. Eu só quero ver se... É que se eu não pensei muito rápido, eu pensei errado.", percebemos que eles não estão certos da resposta que concluíram inicialmente. Eles seguem o diálogo argumentando que gostariam de montar uma conta para confirmar esse resultado "A_3: Mas eu quero ver se eu consigo escrever isso aí... de fazer cinco terços de cinco reais. Eu ainda quero chegar a quantos sanduíches equivale a ... A_4: Eu só queria fazer uma conta.". Eles tentam algumas relações, mas com as proporções que trabalham seguem concluindo que "A_4: Tinha que pagar três reais e outra dois reais, mas não faz sentido.", ou seja, chegaram novamente na resposta inicial, mas estavam convencidos que não estava correta. Eles ainda tentam algumas outras relações, mas, por fim, decidem tentar usar o material: "A_3: É o que eu tava tentando pensar, mas vamos ver se funciona com o material.". Como eles precisavam dividir cinco sanduíches entre três meninas, colocaram as três barras de $\frac{1}{3}$ abaixo das barras de $\frac{1}{5}$. Com os conhecimentos de fração equivalente, decompuseram as frações de $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$ de modo em que elas pudessem ser representadas com o mesmo denominador.

> A_4: É que eu tava tentando ver, tipo assim, se todos os sanduíches têm vários pedacinhos, entendeu? E pensar que cada um vai comer tantos pedacinhos. E daí foi dividido em 15 pedacinhos. Se a fulana comeu 5 pedacinhos dos 15, quanto equivale em dinheiro? [...]
> A_3: Tá, ela [Jô] levou $\frac{3}{15}+\frac{3}{15}+\frac{3}{15}$. E a Pat levou...
> A_4: $\frac{3}{15}+\frac{3}{15}$.
> A_3: Dá pra simplificar, mas simplificar não sei se ajuda a gente. Tem que dar $\frac{9}{15}$.
> A_4: Aí tipo, por três, não sei.
> A_3: Se somar, vai dar um quinze quinze $\left(\frac{15}{15}\right)$. Se somar, vai dar certinho essa parte. Ela levou isso aqui e comeu um, dois, três. Ela comeu cinco.
> A_4: Como?
> A_3: Então, ela levou nove e comeu cinco.
> A_4: Ok. Cinco quinze.
> A_3: Cinco quinze. Acho que é isso, né? Tem um, dois, três, quatro, cinco, é... Cada um comeu essa parcela de sanduíche.
> A_4: Ah, entendi, entendi.
> A_3: Comeu $\frac{5}{15}$. Tá. Ela [Jô] comeu $\frac{5}{15}$, no final ela ficou no prejuízo de $\frac{4}{15}$. Essa aqui [Pat] levou cinco e ficou no prejuízo de $\frac{1}{15}$. O que dá certinho a parte dela.

Mesmo depois de concluírem essa divisão, tiveram dificuldade em fazer a relação com quanto Cris deveria pagar para Jô e Pat. Eles explicam as contas para P_2, mas estavam confusos com relação à conclusão, pois simplificam as frações e voltam na relação de um terço. P_2 diz que eles estão no caminho e que só precisam entender o referencial deles: "É que talvez a referência que vocês estão usando, tá fazendo algebricamente, vocês chegarem em uma conclusão incorreta. O que é o referencial de vocês?". Com mais algumas tentativas, eles concluem: "A_3: Se a gente dividisse os cinco reais... Pô, é quatro reais pra um e um pra outro. A_4: É que a gente tem que pensar no prejuízo. Tipo, o que ela não comeu. O que ela deu pra outro, entendeu?".

Novamente, observamos que a possibilidade de discutir, refletir e usar diferentes registros fez com que os alunos percebessem que a resposta inicial não estava correta e, com o uso de conversões e tratamentos de registros, eles conseguiram chegar na solução.

5 Considerações Finais

Ao iniciar a escrita desse artigo, buscávamos entender – a partir de uma aplicação realizada em duas turmas do curso de Licenciatura em Matemática, uma de segunda e outra de quinta fase – de que forma apareciam os registros de representação nas resoluções e discussões dos alunos e como o material concreto fez-se presente nesse processo. A partir do problema gerador proposto, a análise evidenciou que, ao trabalhar apenas na representação simbólica (algébrica ou numérica), exceto em situações pontuais, as equipes demonstraram domínio, ou seja, não havia dificuldades em realizar as operações matemáticas. Ainda que o cálculo realizado não fizesse sentido para o problema, eles sabiam como operar. A barreira estava, na maioria das vezes, em converter a informação encontrada para um outro registro que pudesse falar sobre o problema.

Essa dificuldade de transitar (fazer a conversão) entre os registros natural e simbólico, e entre os registros natural e concreto, ficou bastante evidente e atingiu a maioria das equipes. Isso fica claro quando as equipes não conseguem interpretar o significado que o valor numérico encontrado tem para o problema (como na Figura 12 e nos diálogos de E_6), ou quando não conseguem representar a situação problema no material concreto (por exemplo na Figura 7(b) e nos diálogos de E_5).

Tínhamos, como hipótese, que o material concreto serviria de apoio na interpretação do problema e, com isso, facilitaria os processos de conversões e tratamentos necessários para a resolução. Contudo, a falta de familiaridade com esse tipo de representação impediu que o uso do material fosse tão intuitivo quanto pensávamos. Ainda assim, o material foi usado com duas intenções: interpretação do problema e visualização do resultado (como visto nas Figuras Figura **8**(a), Figura **8**(b) e Figura **14** e nos diálogos de E_2 e E_6, por exemplo).

Uma dificuldade percebida que, talvez, represente uma limitação do material foi no momento de fazer a escolha das peças para representar o problema. Por exemplo, o fato de estarem gravados nas peças números fracionários deixava os alunos em dúvida sobre qual peça seria adequada para representar cada sanduíche, já que não possuíam cinco peças de um inteiro. Por outro lado, ainda que os alunos tivessem usado o material concreto com duas intenções, ao longo da análise e por meio da escuta dos áudios, percebemos que outros processos aconteciam nesse uso, demonstrando potencialidades que, antes da aplicação, não eram tão claras para nós. Identificamos que os alunos puderam "pensar com" o material, "provar" a resposta com o material, compreender o problema com o material e ampliar a compreensão sobre o problema e sobre frações por meio do material.

Na análise, trazemos as resoluções de duas turmas que estavam em momentos bem diferentes do curso: oito alunos na quinta fase - a reta final (são sete fases no total) - e quatro na segunda - o início da graduação. Já tínhamos, como hipótese, que os resultados seriam diferentes e isso, de fato, foi observado nas dificuldades de resolução/interpretação. Os alunos da segunda fase levaram 15 min a mais para concluir os resultados e, dos quatro, três demonstraram muita dificuldade em determinar uma fração equivalente para a divisão dos sanduíches. Eles tentavam encontrar uma peça que se encaixaria na divisão (Figura 8(b)), sem pensar numericamente qual fração estavam buscando. Essa dificuldade não apareceu na turma da quinta fase. Um ponto que nos surpreendeu foi a resistência de alguns alunos da segunda fase em usar o material para interpretar/resolver o problema. A_{11}, por algumas vezes, disse que não tinha necessidade em fazer com o material e, mesmo quando conseguia fazer as interpretações corretas, insistia que não tinha necessidade, como destacado nos diálogos apresentados ao longo da análise.

Com relação à resolução do problema, percebemos que, num primeiro momento, todas as equipes, exceto E_4, apresentaram um resultado errado. As pesquisadoras, com base na MEAAMaRP, questionaram as equipes e as instigaram a pensar a resolução em outro registro de representação, não dizendo que o resultado estava certo ou errado, mas com intuito de ampliar a compreensão da situação em diferentes registros. Com esse desafio, os alunos foram percebendo alguns equívocos ou confirmando sua solução inicial. Se estivéssemos numa aula tradicional, temos, por hipótese, que o problema teria sido corrigido, mas os alunos não teriam esse momento de refletir sobre a situação por outra perspectiva, apenas receberiam a informação pronta que, provavelmente, não lhes causaria os questionamentos e a necessidade de olhar por outra perspectiva, gerando um aprendizado mais superficial.

6 Agradecimentos

As autoras agradecem à professora que cedeu as aulas para a aplicação das atividades, aos alunos participantes, ao Laboratório Fábrica Matemática (FAB3D) pela produção dos materiais, ao grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Sistemas Aplicados ao Ensino (PEMSA), a Universidade do Estado de Santa Catarina (Udesc) e à Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina (FAPESC).

Referências

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC. L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: Por que através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC. L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Org.). **Resolução de Problemas: teoria e prática.** 2. ed. Jundiaí: Paco Editorial, 2021, p. 37-57.

AZEVEDO, E. B.; FIGUEIREDO, E. B.; PALHARES, P. B. Adaptação no roteiro da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática do GTERP para ensinar Cálculo Diferencial e Integral através da Resolução de Problemas. **Revista de Educação Matemática**, [s. l.], v. 17, p. e020012, 2020. Disponível em:

https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/187. Acesso em: 08 dez. 2024.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo.** Trad. Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, 2016.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Ministério da Educação e do Desporto: Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, 1997.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais.** Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat**: Revista eletrônica de educação matemática, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 13 dez. 2012. Tradução de Méricles Thadeu Moretti.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. **Boletim da SBEM**. SBM: São Paulo, ano 4, n. 7, 1990.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

MATOS, J. M.; SERRAZINA, M. L. **Didáctica da Matemática**. Lisboa: Matemática Universidade Aberta, 1996.

MIRANDA, C. A.; REZENDE, V. Diferentes representações dos números racionais: uma análise de livros didáticos de matemática. **Debates em Educação Científica e Tecnológica, Vitória**, v. 7, n. 3, p. 46-688, mar. 2017. Disponível em: https://ojs.ifes.edu.br/index.php/dect/article/view/206/201. Acesso em: 08 dez. 2024.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática (REMat)**, Ano 9, Vol.9, nº 9-10, p. 1-6, 2004-2005.

OLIVEIRA, E. N. **O aprendizado de frações por meio de materiais concretos: uma tentativa de superar dificuldades elementares**. 2022. (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Centro de Ciências Tecnológicas, Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2022.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. As Diferentes “Personalidades” do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas. **Bolema**, Rio Claro/SP, Ano 21, nº 31, p. 79 a 102, 2008.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, S. (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012.