Luminária, União da Vitória, v, 19, n. 02, p. 22-29
ISSN: 2359-4373. Brant & Sapunaru (2017)

O Problema das quatro linhas de Pappus e a geometria analítica na abordagem de René Descartes

Filipe Bruzinga Brant
Instituto de Ciência e Tecnologia da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri.
Contato: filipebruzinga@hotmail.com

Raquel Anna Sapunaru
Instituto de Ciência e Tecnologia da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri.
Contato: raquel.sapunaru@ict.ufvjm.edu.br

Resumo: Este trabalho tem por objetivo expor alguns aspectos da contribuição de Descartes para o estabelecimento da geometria analítica. Em A Geometria, Descartes explana sobre novas formas de tratar a geometria dos antigos. Para tal, ele utiliza métodos aritméticos e algébricos. Desse modo, este trabalho busca evidenciar a efetividade dos procedimentos matemáticos realizados por Descartes na solução dos problemas geométricos típicos de sua época. Dentre a eficácia desses métodos, tem-se a solução do problema das quatro linhas de Pappus. Tendo isso em vista, nosso trabalho apresenta o desenvolvimento da geometria analítica, desde seu nascimento, através da solução cartesiana para o problema das quatro linhas de Pappus, destacando sua importância histórica.
Palavras-chave: Descartes, Geometria Analítica, Pappus.

The four lines of Pappus' problem and the analytical geometry in the approach of René Descartes

Abstract: This paper aims to expose some aspects of Descartes contribution to the establishment of analytic geometry. In The Geometry, Descartes explores new ways of dealing with the geometry of the ancients. For this, he uses arithmetic and algebraic methods. In this way, this work looks for demonstrate the effectiveness of the mathematical procedures performed by Descartes in the solution of the geometric problems typical of his time. Among the efficacy of these methods, one has to solve the problem of the four Pappus lines. With this in view, our work presents the development of analytic geometry, from its birth through the cartesian solution to the problem of the four lines of Pappus, highlighting its historical importance.
Keywords: Descartes; Analytical geometry; Pappus.

Como citar este artigo:
BRANT, F. B.; SAPUNARU, R.A.. O Problema das quatro linhas de Pappus e a geometria analítica na abordagem de René Descartes. **Luminária**, União da Vitória, v.19, n.02, p. 22 – 29, 2017.

INTRODUÇÃO

Segundo a Enciclopédia Britânica, é provável que a geometria, como a maior parte das outras ciências, tenha nascido no Egito, apontado como o berço do conhecimento humano. De acordo com alguns gregos antigos, os egípcios não podiam reconhecer os limites de seus legados quando havia as cheias do Nilo. Por isso, inventaram a arte de medir e dividir a terra para caracterizá-la e separá-la. Outros historiadores atribuem essa invenção aos Hebreus, enquanto alguns poucos, a diferentes povos ou aos deuses. Assim, quando os homens começaram a possuir terras e viver sob leis, eles não puderam mais ficar sem medir. Aqui a geometria tem sua origem.

Combinando a geometria dos egípcios com o método analítico de Descartes, que "[...] nos ensina a dividir um problema em tantas partes quantas forem possíveis, até que suas dificuldades se tornem facilidades" (DESCARTES, 2015, p.3), tem-se a geometria analítica cartesiana. Nela, encontra-se um rudimento daquilo que deu origem ao que a geometria analítica de fato é nos dias de hoje.

Contudo, para fazer essa combinação quase mágica, Descartes teve que recorrer a alguns escritos muito antigos. Trata-se do problema das quatro linhas de Pappus ou um problema de lugar geométrico. Ao tentar resolvê-lo, o filósofo e matemático tem a brilhante ideia de fixar uma reta, tal que toda solução do problema estivesse a ela ligada como se fosse uma espécie de referencial. Eis aí o que chama-se hoje de "eixo x".

Assim, o presente trabalho segue descrevendo uma breve biografia de Descartes e em seguida explana sobre um de seus apêndices, A Geometria e sua contribuição para o desenvolvimento da geometria analítica. Além disso, um dos pontos principais abordados nesse apêndice foi a caracterização e a solução do problema de Pappus. Por fim, será evidenciada a filosofia do método de Descartes na solução desse problema. Concluindo, retoma-se as principais ideias dos tópicos abordados anteriormente e mostra-se como os resultados que Descartes obteve a partir de sua solução do problema das quatro linhas de Pappus influenciou no futuro da matemática.

DESENVOLVIMENTO

A vida de Descartes

A biografia de Descartes, segundo Eves (2007) e Katz (2010), é de que ele era filósofo e matemático, nascido em 1596, na cidade de La Haye, próximo a Tours, na França, em uma família da antiga nobreza francesa. Aos oito anos de idade, foi para escola jesuíta La Flèche, permanecendo lá até 1612, quando foi para Paris a fim de dedicar-se ao estudo da matemática, juntamente com o padre M. Mersenne e C. Mydorge.

Devido a uma enfermidade que tomou conta da sua juventude, acostumou-se a acordar tarde e, como consequência disso, desenvolveu o hábito de meditar durante as manhãs. De fato, seus pensamentos o levaram a concluir que pouco se aprendia na escola e, por isso, decidiu abandonar os estudos para viver viajando e se aventurando. Em 1617, se alistou e fez parte do exército do príncipe Maurício de Orange. Algum tempo depois, quando deixou o exército, passou cerca de cinco anos viajando pela Europa, até que por fim, em 1628, se estabeleceu na Holanda, onde passou a se dedicar ao que se tornou o objetivo de toda a sua vida: criar uma filosofia própria que desvendasse a verdade sobre tudo. Na letra de Descartes:

> (...) utilizei o resto da minha juventude para viajar, para ver cortes e exércitos, para frequentar pessoas de diferentes disposições e condições, para armazenar várias experiências, para dar provas de mim próprio nos encontros com os quais a fortuna me confrontou e em todo lado para refletir sobre as coisas que ocorriam, para poder tirar algum proveito delas (DESCARTES apud KATZ, 2010, p.548).

Após sua estadia na Holanda, retornou a Paris onde retomou seus estudos sobre matemática e filosofia, empenhando-se na construção de instrumentos ópticos. Aproximadamente dois anos depois, decidiu mudar-se definitivamente para a Holanda por medo de uma perseguição religiosa. Lá viveu cerca de vinte anos aprofundando ainda mais seu conhecimento em filosofia, matemática e ciências em geral. Rapidamente, escreveu um grande tratado sobre a descrição física do universo, Le Monde, mas ao saber que Galileu havia sido condenado pela Igreja Católica por suas ideias revolucionárias, decidiu não publicá-lo. Entretanto, convencido de que deveria compartilhar suas ideias com o mundo, dedicou-se a escrever uma obra sobre a ciência universal. Assim sendo, em 1637, publicou o *Discours de la Méthode pour Bien Conduire la Raison et Chercher la Vérité* dans les Sciences. O Discurso do Método vinha acompanhado de três apêndices, a saber: *La Dioptrique*, sobre óptica; *Les Metéores*, sobre meteorologia; e, *La Géométrie* sobre geometria. Este último tinha como principal objetivo provar a eficácia do seu método filosófico, matematicamente.

Devido ao crescimento de sua reputação, logo após o lançamento da edição em latim do *Discurso do Método*, em 1649, Descartes foi convidado pela rainha Cristina da Suécia para ensiná-la sobre sua filosofia. Apesar de algumas ressalvas, o filósofo aceitou o convite. Infelizmente, contraiu uma infecção pulmonar devido ao clima nórdico que o levou à morte, em 1650. Somente dezessete anos após o sepultamento de Descartes, seus restos mortais foram levados para a França e reenterrados em Paris, exceto seus ossos da mão direita que foram guardados por um funcionário francês responsável pelo transporte da ossada. Assim, sendo A Geometria a única obra detentora de sua matemática e de seu revolucionário método aplicado diretamente à matemática, segue-se uma explanação mais detalhada sobre esse conteúdo.

A Geometria

Para Eves (2007), "A Geometria" era o mais importante apêndice do Discurso do Método. Nele, vê-se claramente a grande colaboração de Descartes para o desenvolvimento da matemática. De acordo com D. Gondim e R. Sapunaru, "Nesse pequeno texto, encontrava-se a 'chave de ouro' para todos os matemáticos do século XVII: a geometria analítica" (SAPUNARU; GONDIM, 2016, p.48). Cabe lembrar que, A Geometria foi o único texto matemático de Descartes. Sua estrutura divide-se em três partes, denominados: "Livro I", "Livro II" e "Livro III". O primeiro livro explana alguns dos princípios básicos da geometria euclidiana. Nele, Descartes amplia significativamente o escopo da geometria dos gregos antigos, tornando-a aritmética, preocupando-se também em relacionar e descrever as curvas cinematicamente. Mol (2013) entende o "Livro I" do seguinte modo:

> (...) a primeira seção de A Geometria era intitulada "Como o cálculo aritmético se relaciona às operações de geometria". De fato, a nova concepção de geometria proposta por Descartes, muito mais do que a aplicação da álgebra à geometria, buscava a tradução das operações aritméticas para a linguagem geométrica. O seu método tinha dois objetivos centrais: libertar a geometria do uso de diagramas através de procedimentos algébricos e dar significado às operações algébricas através da interpretação geométrica (MOL, 2013, p.96).

O segundo livro trata principalmente da classificação das curvas e mostra outro método de construir tangentes. O terceiro e último livro traz a resolução de equações de grau maior que dois, através do uso daquilo que se conhece hoje como "a regra de sinais de Descartes", cujo objetivo principal é determinar o número de raízes, tanto positivas, quanto negativas de um polinômio.

Portanto, foi em A Geometria que Descartes convencionou a utilização das primeiras letras do alfabeto para representar as constantes e das últimas para representar as variáveis. Também foi nessa obra que nasceu a notação matemática para as potências, isto é, a noção de que uma letra poderia indicar qualquer quantidade; o uso do princípio de identidade de polinômios; e, pela primeira vez, traçou-se o "eixo x".

Especificamente sobre a Geometria Analítica, de acordo com Eves (2007), Descartes inovou a concepção de geometria, acrescentando à ela a aritmética. Modernamente, esse método consiste em associar os pontos do plano com pares ordenados de números, relacionando as curvas do plano e as equações de duas variáveis, de forma que cada curva no plano corresponda a uma equação bem definida do tipo $f(x,y)=0$ e cada uma dessas equações corresponda a uma curva do plano. Contudo, vale ressaltar que não foi bem isso que Descartes fez.

Existem controvérsias a respeito de quem inventou a geometria analítica e sobre a época desse acontecimento. Entretanto, a maioria dos historiadores concorda que Descartes contribuiu de modo decisivo para o estabelecimento dessa nova maneira de ver e entender a geometria, a aritmética e a álgebra. Mol (2013) analisa a influência de Descartes naquilo que chama-se nos dias de hoje de geometria analítica e reflete:

> (...) no entanto, há poucos elementos em A Geometria que possibilitem identificar o que hoje conhecemos como geometria analítica. Descartes não trabalha sistematicamente com sistema de coordenadas retangulares, fórmulas para distâncias, inclinações e ângulos de retas. Além do mais, o fato central na geometria analítica, de que equações em duas variáveis correspondem a lugares geométricos no plano, aparece apenas quando estuda equações do tipo $y^2= ay - bxy + cx - dx^2$, equação geral de uma cônica passando pela origem (MOL, 2013, p.96).

Contrariando a citação acima, entende-se que sem a solução cartesiana do problema das quatro linhas de Pappus nada poderia ter sido feito. Há de se dar sempre o primeiro passo. Nesse sentido, é mister conhecer, inicialmente, um pouco da vida do obscuro Pappus.

Pappus de Alexandria e sua obra

Ainda levando em conta as observações de Eves (2007), o historiador afirma que Pappus de Alexandria viveu no começo do século IV e foi o primeiro matemático, até onde se sabe, que publicou um estudo claro sobre os métodos de análise e síntese. Ele explanou os trabalhos matemáticos desenvolvidos pelos gregos antigos, acrescentando alguns resultados próprios.

De acordo com o dicionário de Biografias Universais, antiga e moderna de Joseph Fr. Michaud e Louis G. Michaud, Pappus ficou conhecido por suas *Coleções Matemáticas* cujas duas primeiras edições apareceram primeiramente em Pesaro, 1588, depois em Bolonha, 1660. Para Eves (2007) a obra de Pappus era "[...] uma combinação de guia da geometria da época, acompanhado de comentários, com numerosas proposições originais, aprimoramentos, extensões e notas históricas" (EVES, 2007, p.210). As Coleções Matemáticas eram compostas de oito livros, nos quais todo o Livro I e parte do Livro II se perderam. Na sequência, apresenta-se um breve resumo dos livros que compõe a obra de Pappus:

a) Sobre o Livro II pode-se dizer que ele tratava de um método descrito por Apolônio de Perga para escrever grandes números e operações.

b) O Livro III foi dividido em quatro assuntos. Os dois primeiros falavam sobre a teoria das médias e, os dois últimos, sobre determinadas desigualdades de um triângulo e sobre a inscrição dos cinco poliedros regulares em uma esfera específica.

c) No Livro IV, Pappus expandiu o teorema de Pitágoras, incluindo a espiral de Arquimedes, a conchoide de Nicomedes e a quadratriz de Dinostrato.

d) O Livro V se dedica principalmente ao estudo da isoperimetria, onde foram feitas duas comparações: uma entre figuras de áreas limitadas por perímetros iguais e outra entre figuras sólidas cujos volumes eram limitados por áreas iguais.

e) No Livro VI, Pappus tratou do estudo da astronomia com destaque para o Almagesto de Ptolomeu.

f) O livro VII, considerado o mais importante, foi onde se enunciou o famoso problema das quatro linhas de Pappus, que está sendo aqui tratado.

g) Finalmente, no Livro VIII encontra-se a solução do problema da construção de uma cônica por cinco pontos dados, sendo este um complemento do Livro VII.

Grosso modo, observa-se que as Coleções Matemáticas são interessantes porque a partir de lemas de Euclides, Arquimedes, Apolônio, entre outros grandes matemáticos, Pappus desenvolveu soluções de problemas curiosos do antigo método analítico dos antigos. J. Montucla, matemático e escritor francês do século XVIII, conhecido por ter elaborado uma história da matemática em vários volumes, atribuiu a Pappus a primeira ideia frequentemente citada como princípio de P. Guldin, matemático e astrônomo jesuíta suíço do século XVI-XVII, que formulou o teorema de Guldinus, determinando a superfície e o volume de um sólido de revolução.

Resumindo, a história do problema das quatro linhas de Pappus foi uma tentativa de continuar os trabalhos de Euclides, Arquimedes e Apolônio que se encontravam limitados aos estudos da astronomia, da trigonometria e da álgebra. Quando teve acesso à obra de Apolônio sobre as secções cônicas, observou que ele não conseguiu generalizar esse problema em particular, enunciado por Eves da seguinte forma:

> Se p_1, p_2, p_3, p_4 são os comprimentos dos segmentos de reta traçados de um ponto P a quatro retas dadas, de maneira a formar com elas ângulos dados e se $p_1 p_2$, + kp_3^2 ou $p_1 p_2 = k p_3 \; p_4$, onde k é uma constante, então o lugar descrito por P é uma secção cônica (EVES, 2007, p.210).

Conforme o site do E. W. Weisstein e do site MathWorld-A Wolfram Web Resource, a área A de uma superfície de revolução gerada pela rotação de uma curva plana C em torno de um eixo externo será igual ao seu comprimento L multiplicado pela distância d percorrida por sua centroide numa rotação completa em torno do referido eixo.

$$A = Ld \ (1)$$

O volume V de um sólido de revolução gerado pela rotação de uma área plana em torno de um eixo externo é igual ao produto da área A pela distância d percorrida pelo centroide em uma rotação completa em torno do referido eixo.

$$V = Ad \ (2)$$

Trata-se agora de desvendar o problema das quatro linhas de Pappus.

Descartes e o acesso ao problema geométrico

De acordo com o historiador S. Gaukroger (2002), Descartes, em 1619, estabeleceu critérios algébricos e instrumentais para a classificação das curvas. A princípio a distinção entre as curvas geométricas e as não geométricas se dava segundo a capacidade de traçá-las através de um movimento contínuo de um compasso mesolábio, instrumento geométrico que calculava mecanicamente médias proporcionais. No entanto, esse método era falho, pois muitas curvas construídas com instrumentos mecânicos poderiam ser descritas de forma complexa em termos algébricos. Por conseguinte, Descartes cogitou a equação em si como um método mais importante do que o grau de simplicidade na construção de uma curva, com régua e compasso, sendo esses determinantes em termos de clareza e distinção da curva. Posto isto, dessas duas noções foram estabelecidos os critérios, algébrico e instrumental, de classificação das curvas. Porém, eles foram descritos de maneira conflitante, fato que Descartes se opunha admitir. Dessa forma, quando os pontos de uma curva pudessem ser relacionados com uma coordenada retilínea através de um número limitado de operações algébricas, de acordo com o critério algébrico, aquela seria propriamente dita geométrica.

Gaukroger (2002) afirma que Descartes teve acesso ao problema das quatro linhas de Pappus em 1630. Nesse ano, Descartes se matriculou como aluno de matemática na Universidade de Leiden, onde, ao final de 1631, bem como C. Mydorge, entre outros matemáticos do século XVII foram apresentados ao problema de Pappus por intermédio de J. Golius. Golius havia assumido a cátedra de matemática em 1629 em Leiden e possuía um notável interesse pelas secções cônicas, especialmente pela obra de Apolônio.

Do que trata o problema das quatro linhas de Pappus?

Tanto para Gaukroger (2202), quanto para Eves (2007) e Katz (2010), o problema do lugar geométrico, aqui apresentado como o problema das quatro linhas de Pappus, se caracteriza pela descoberta de um conjunto de pontos que atendam a uma determinada condição. A princípio, ele foi formulado por Apolônio em termos de três ou quatro linhas e solucionado no Livro III das Cônicas como sendo secções cônicas. Tomando o primeiro caso em questão, pode-se descrevê-lo da seguinte forma: dadas três retas em posição, o objetivo é descobrir o lugar dos pontos a partir dos quais é possível traçar três linhas até as retas dadas, formando ângulos entre si, de maneira que o produto dos comprimentos de duas dessas linhas seja proporcional ao quadrado da terceira. Idem para o caso de quatro linhas, sendo que nesse haveria uma proporção entre o produto do comprimento de duas linhas com o produto do comprimento das outras duas restantes.

Pappus tomando conhecimento desse problema estendeu-o a cinco ou seis linhas, descrevendo a solução de forma que, nesses casos, a proporção seria caracterizada por um retângulo contido por duas linhas e um sólido contido por três linhas. O ponto criador do lugar geométrico estaria localizado numa linha que transcenderia o lugar geométrico sólido. Para além de seis linhas, de acordo com Pappus, não seria possível saber se a proporção de algo contido em quatro linhas seria preservada em relação ao que estaria contido pelas demais, uma vez que não existe nenhuma figura com mais de três dimensões. Empenhando-se em superar as limitações dimensionais da matemática, Pappus chegou a formular o problema em relação a n linhas.

Como Descartes aborda o problema das quatro linhas de Pappus

Segundo Boyer,

> (...) sob a errônea impressão de que os antigos não tinham conseguido resolver esse problema [o das quatro linhas de Pappus], Descartes aplicou a ele seus novos métodos e resolveu-o sem dificuldade. Isso fez com que ele percebesse o poder e a generalidade de seu ponto de vista [...] (BOYER, 1974, p.247).

Ele tratou o problema de maneira algébrica, generalizando-o, ao relacionar as linhas mediante o uso de apenas duas incógnitas. Seu método consistia em reduzir o problema de *n* linhas a um problema em que carecesse saber apenas os comprimentos de algumas linhas. Essas linhas seriam os eixos das coordenadas e os comprimentos nos dariam as abscissas e as ordenadas dos pontos.

A abordagem utilizada por Descartes tinha como base mostrar de que modo o problema das quatro linhas, generalizado para *n* linhas, poderia ser simplificado, como qualquer problema geométrico a apenas um, no qual só fosse necessário conhecer os comprimentos de algumas linhas. Essas linhas seriam os eixos das coordenadas. Isso não estava claro no gráfico de Descartes (Figura 2), pois ele ajustou os eixos às linhas ao invés de tomar os eixos como referência e ajustar as linhas aos eixos como se faz hoje. Dessa forma, o que se vê são eixos não perpendiculares entre si, o que dificulta, a princípio, o entendimento do problema. Por isso, primeiramente, será enunciado o problema das quatro linhas em termos mais claros, de acordo com o que se está habituado e, posteriormente, será mostrada a abordagem de Descartes seguida da solução proposta por ele.

Dito isto, na Figura 1 são dadas quatro retas, nas posições *AB*, *BD*, *CD* e *AC*, como se pode observar. O problema consiste em determinar o lugar geométrico de pontos como *P*, a partir do qual se pode traçar outras linhas *PQ*, *PR*, *PS* e *PT* até as quatro retas dadas, de maneira que cada uma delas sempre forme o mesmo ângulo com a reta que se encontra, de modo que *PS.PT* seja proporcional à *PQ.PR*. Nesse caso, a solução será uma cônica que passa pelas quatro interseções (*A*, *B*, *C*, *D*) das quatro retas dadas.

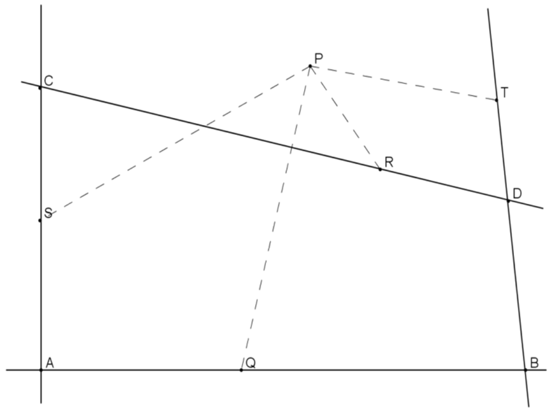

Figura 1. Problema das quatro linhas de Pappus ajustando os pontos ao eixo. **Fonte**: Gaukroger, 2002, p.268

Descartes apresentou o problema de acordo com a Figura 2. Nela, as linhas cheias são as retas determinadas e as tracejadas as são retas buscadas. Ele trata as retas *AB* e *BC* como eixo x de comprimento x e eixo y de comprimento y, respectivamente. Assim, ele relaciona os eixos com as demais retas chegando à solução que será descrita a seguir: sabe-se a razão $AB:BR$, através dos ângulos dados do triângulo *ABR*. Simplificando essa razão para z/b, tem-se que $BR = bx/z$, onde *B* se encontra entre *C* e *R*. Dados também os ângulos do triangulo *DCR*, trata-se a razão $CD:CR$, como z/c; sendo $CR = y + bx/z$ e $CD = cy/z + cbx/z^2$. Ademais, como as posições de *AB*, *AD* e *EF* são dadas, sabe-se o comprimento k de *AE*; logo, $EB = k + x$, onde *A* situa-se entre *E* e *B*. São dados também os ângulos do triângulo *ESB*, assim sabe-se a razão $BE:BS$. Tratando essa razão como z/d, tem-se $BS = (dk + dx)/z$ e $CS=(zy + dk + dx)/z$, onde *B* situa-se entre *S* e *C*. Uma vez que os ângulos do triângulo *FSC* também são dados, por conseguinte, também é dada a razão $CS:CF$. Essa, tratada como z/e, traz $CF= (ezy + dek + dex)/z^2$. Considerando $I = AB$, tem-se $BG = I - x$ e considerando também $BG: BT = z/f$ do triângulo *BGT*, tem-se que $BT= (fl - fx)/z$ e $CT = (zy + fl - x)/z$; e por fim, considerando $CT:CH = z/g$ no triângulo *TCH*, vê-se que $CH = (gzy + fgl - fgx)z^2$.

Para explicar melhor essa solução toma-se como exemplo o lugar geométrico do círculo, que consiste num conjunto de pontos num plano, todos localizados a uma mesma distância de um ponto determinado a priori. Se essa distância for r, a equação do lugar geométrico será $x^2 + y^2 = r^2$.

O que Descartes demonstrou no problema de Pappus sobre o lugar geométrico foi que independentemente da quantidade de linhas dadas, o comprimento de uma linha que passe por *C* e forme um dado ângulo com essas linhas sempre será definido em três termos, como o modelo $ax + by + c$. Se porventura o problema retratar três ou quatro linhas fixas, a equação será quadrática, ou seja, para qualquer valor de y pode-se encontrar o valor de x utilizando apenas uma régua e um compasso. Portanto, quando dado um número suficientemente grande de valores, será possível desenhar uma curva que compreenda *C*. Assim, para cinco ou seis linhas a equação será cúbica; para sete ou oito, quártica, para nove ou dez, quíntica e assim por diante. Dessa forma, subindo o grau da equação, ela sempre será aumentada em duas linhas.

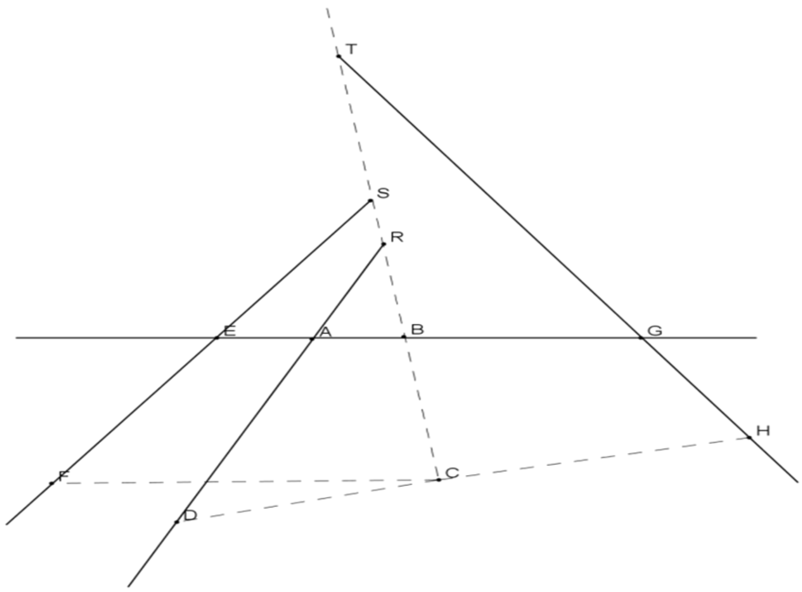

Figura 2. Problema das quatro linhas de Pappus ajustando os pontos ao eixo de acordo com Descartes. **Fonte**: Gaukroger, 2002, p.268.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Geometria é, sem sombras de dúvidas, o apêndice mais importante do Discurso do Método. A partir dele foi possível iniciar o desenvolvimento da geometria analítica, visto que nessa obra, Descartes teve a brilhante ideia de tornar a geometria simples, unindo-a à aritmética. Assim, ele pode dar um significado real às operações algébricas através de equações e atribuições de variáveis, como pode ser visto nos três livros que compõem A Geometria.

Além disso, é notável lembrar que Pappus, considerado por muitos o primeiro matemático da história, teve um papel fundamental na solução de inúmeros problemas através do seu método de síntese e análise. Pappus, através de seus livros VII e VIII, propôs seu famoso problema das quatro linhas, o qual seria solucionado por Descartes no primeiro livro de A Geometria. Dessa forma, após o acesso do problema do lugar geométrico proposto por Pappus, que consiste em um conjunto de pontos que atendam uma determinada condição, Descartes soluciona o problema das quatro linhas de forma simples. Ele o trata de maneira algébrica, que consiste em relacionar as linhas mediante às incógnitas. Portanto, considera-se a contribuição de Descartes para a geometria analítica incomensurável, já que através de sua obra ele evidencia uma metodologia utilizada na compreensão e solução de problemas geométricos, como aquela das quatro linhas de Pappus.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

DESCARTES, R. **A Geometria**. Trad., Intr. e Coment. Raquel A. Sapunaru. São Paulo: Editora da Física, 2015.

EDITORES DA ENCICLOPÉDIA BRITÂNICA. **Geometria**. Enciclopédia Britânica. 2003. Disponível em: <https://www.britannica.com/topic/geometry>. Acesso em: 18 de maio de 2017.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Igyno Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2007.

GAUKROGER, S. **Descartes**: Uma Biografia Intelectual. Trad. Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Contraponto, 2002.

KATZ, V. J. História da Matemática. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

MICHAUD, J. F.; MICHAUD, L. G. Biographie Universelle, ancienne et moderne**. Volume 32. Bibliothèque Nacionale de France.** Disponível em: <http://gallica.bnf.fr/>. Acesso em: 18 de maio de 2017.

MOL, R. S. **Introdução à História da Matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

MONTUCLA, J. E. **Histoire des Mathématiques, dans laquelle on rend compte de leurs progress depuis leur origine jusqu'à nos jours... [...].** 1758. Tome I. Bibliothèque Nacionale de France. Disponível em: <http://gallica.bnf.fr/>. Acesso em: 18 de maio de 2017.

SAPUNARU, R. A.; GONDIM, D. M. **Os Atores (Des)conhecidos dos Cálculos**. Porto Alegre: Editora Fi, 2016.

WEISSTEIN, E. W. **Pappus's Centroid Theorem**. MathWorld-A Wolfram Web Resource. Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/PappussCentroidTheorem. html>. Acesso em: 18 de maio de 2017.

Submetido: 01/06/2017.
Aceito: 23/06/2017.