

OS CURRÍCULOS DE MATEMÁTICA MOLDADOS, EM AÇÃO E REALIZADOS: UMA ANÁLISE DA COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

DOI: <https://doi.org/10.33871/22385800.2022.11.24.62-82>

Glauce Vilela Martins¹
Rute Elizabete de Souza Rosa Borba²

Resumo: Apresenta-se um recorte dos principais achados de um estudo de doutorado que analisou, à luz da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1986), o trabalho com a Combinatória nos currículos *moldados, em ação e realizados* postos em prática por dois professores da Educação de Jovens e Adultos (EJA). Para tal, foram feitas entrevistas, solicitados e analisados planos de ensino, observadas aulas de Combinatória e efeitos da prática de ensino. Constatou-se que os professores evidenciaram pouco conhecimento do conteúdo, de sua abordagem em materiais curriculares e de seus processos de ensino e aprendizagem. Entretanto, na modelação, propuseram diferentes *situações* combinatórias, seus *invariantes* e variadas *representações simbólicas*. Percebeu-se que os professores contemplaram em seus currículos *em ação* diferentes *situações* de Combinatória, sendo no 1º segmento apenas produtos de medidas e quatro tipos de situação no 2º segmento. Os *invariantes* foram contemplados no desenvolvimento de suas aulas, bem como o uso de desenhos, imagens, listagens e árvores de possibilidades como *representações simbólicas*. No tocante aos efeitos das práticas, tanto os estudantes como os professores evidenciaram aprendizagens com desenvolvimento de estratégias de sistematização dos dados contidos nos problemas. Conclui-se serem necessários aprofundamentos nos distintos segmentos da EJA, no que diz respeito aos currículos *moldados, em ação e realizados* – em particular quanto às *situações* combinatórias tratadas, seus *invariantes* e modos de representação simbólica.

Palavras-chave: Currículo. Combinatória. Educação de Jovens e Adultos. Teoria dos Campos Conceituais.

MOLDED, IN ACTION AND REALIZED MATHEMATICS CURRICULUM: AN ANALYSIS OF COMBINATORICS IN INITIAL YOUTH AND ADULT EDUCATION

Abstract: We present an excerpt of the main findings of a doctoral study that analyzed, in the light of from the Theory of Conceptual Fields (VERGNAUD, 1986), the work with Combinatorics in the shaped curricula, in action and carried out by two teachers of Youth and Adult Education (EJA). To this end, interviews were conducted, teaching plans were requested and analyzed, Combinatorial classes and the effects of teaching practice were observed. It was found that teachers showed little knowledge of the content, their approach to curriculum materials and their teaching and learning processes. However, in the modeling, they proposed different combinatorial situations, their invariants and varied symbolic representations. It was noticed that the teachers included in their curricula in action different situations of Combinatorics, being in the 1st segment only measurement products and four types of situation in the 2nd segment. The invariants were considered in the development of their classes, as well as the use of drawings, images, lists and trees of possibilities as symbolic representations. With regard to the effects of practices, both students and teachers evidenced learning with the development of strategies for systematizing the data contained in the problems. It is concluded that it is necessary to go deeper into the different segments of EJA, with regard to the curricula that are molded, in action and carried out – in particular regarding the combinatorial situations dealt with, their invariants and modes of symbolic representation.

¹ Doutora em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco, Brasil. E-mail: glaucevilela_@hotmail.com - ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8728-5621>

² Doutora em Educação Matemática pela Oxford Brookes University, Reino Unido. Professora da Universidade Federal de Pernambuco. E-mail: resrborba@gmail.com - ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5098-4461>.

Keywords: Curriculum. Combinatorics. Youth and Adult Education. Theory of Conceptual Fields.

Introdução

A Educação de Jovens e Adultos (EJA) é uma modalidade de ensino, assegurada por lei, destinada a garantir os direitos educativos de jovens, adultos e idosos que não tiveram acesso ou interromperam seus estudos antes de concluir a Educação Básica. Os estudantes que compõem essa modalidade de ensino possuem características particulares, que não se evidenciam apenas por suas características etárias, mas, por possuírem ricas experiências extraescolares que, muitas vezes, não são aproveitadas quando esses retornam aos bancos escolares.

O processo de aprendizagem da Matemática na Educação de Jovens e Adultos justifica-se “com oportunidades de fazer emergir uma emoção que comove os sujeitos enquanto resgata (e atualiza) vivências, sentimentos, cultura e, num processo de confronto e reorganização, acrescenta mais um elo à história do conhecimento matemático” (FONSECA, 2002, p.54). Diante desse contexto, é preciso, no processo de ensino e aprendizagem da educação formal, valorizar e utilizar os conhecimentos e habilidades que os estudantes da EJA desenvolveram ao longo da vida.

Corroborando com essa ideia, a Proposta Curricular para EJA (Brasil, 2001), indica o trabalho com a Matemática apoiado nas transformações de *situações* informais vivenciadas no cotidiano dos estudantes, como suporte para uma aprendizagem significativa, a partir de procedimentos sistemáticos e formais. Nesse sentido, torna-se necessário levar em consideração os conhecimentos adquiridos ao longo de suas experiências de vida, estratégias pessoais e concepções matemáticas, permitindo ao docente uma intervenção crítica na transformação dos saberes que foram aprendidos de maneira informal ou intuitiva em saberes mais sistematizados, ambos indispensáveis ao mundo moderno. Assim, objetiva-se acima de tudo, auxiliar os estudantes a um amplo desenvolvimento de formas de raciocínio.

A partir dessa afirmativa, defende-se que desenvolver o raciocínio combinatório na EJA contribui para um melhor entendimento da realidade dos estudantes e para tomadas de decisões mais adequadas, quando essas envolvem escolhas dentre várias possibilidades. É importante destacar que o raciocínio combinatório auxilia no desenvolvimento do raciocínio lógico, necessário não apenas ao desenvolvimento matemático, mas em outras áreas de conhecimento também.

À luz da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1986), a Combinatória está

inserida no campo das estruturas multiplicativas, assim como outros conceitos matemáticos associados à multiplicação e à divisão. Os problemas que envolvem raciocínio combinatório são aqueles, conforme indicado por Borba (2010), os quais apresentam um modo de pensar em situações nas quais dados determinados conjuntos, deve-se fazer agrupamentos dos elementos dos mesmos a partir de critérios específicos (de escolha e de ordenação de elementos) para determinar o número total de agrupamentos possíveis.

Respeitando as especificidades de cada nível e modalidade de ensino, é preciso estimular distintos modos de pensar nas diversas dimensões do currículo propostas por Sacristán (2000). Dessa forma, no presente artigo buscou-se analisar como a Combinatória, à luz da Teoria dos Campos Conceituais proposta por Vergnaud (1986), é tratada nos currículos *moldados, em ação e realizados* por professores e estudantes do primeiro e segundo segmentos da Educação de Jovens e Adultos.

Nas próximas seções, serão apresentados os pressupostos teóricos centrais ao estudo – no que diz respeito ao currículo e ao desenvolvimento curricular, à Teoria dos Campos Conceituais e ao raciocínio combinatório –, seguido do método adotado na pesquisa, os principais resultados obtidos, a análise dos mesmos e, por fim, as considerações finais a respeito dos achados observados.

O currículo e o desenvolvimento curricular

O currículo, segundo Sacristán (2000), pode ser entendido como um objeto que cria em torno de si um campo de ações diversas, aos quais múltiplos agentes e forças se expressam em sua configuração. Para o autor, o currículo estabelece direção, orientação e organização das práticas educativas, se configurando como um processo de construção, inserção, efetivação e expressão das ações pedagógicas, bem como das avaliações e das intervenções ocorridas nas mesmas.

De acordo com Sacristán (2000, p. 173):

O currículo é muitas coisas ao mesmo tempo: ideias pedagógicas, estruturação de conteúdos de uma forma particular, detalhamento dos mesmos, reflexo de aspirações educativas mais difíceis de moldar em termos concretos, estímulo de habilidades nos alunos, etc. Ao desenvolver uma prática concreta de modo coerente com quaisquer desses propósitos, o professor desempenha um papel decisivo.

Nesse contexto, o currículo escolar possui um significado amplo e se caracteriza como

centro da ação educativa, tornando o professor agente ativo e determinante no processo de tomadas de decisões do desenvolvimento do currículo. Assim, dentre vários atores que atuam no desenvolvimento curricular, é importante destacar que o professor possui certa autonomia no processo de modelação e prática do currículo na sala de aula.

O supracitado autor propõe seis instâncias de desenvolvimento curricular, isto é, um modelo de interpretação do currículo que contempla desde os documentos oficiais propostos pelos órgãos educacionais até o processo de verificação da aprendizagem dos estudantes, descritas por ele como: 1) currículo prescrito: prescrição ou orientação, textos curriculares oficiais, que atuam como ponto de partida na ordenação do sistema curricular, tornando-se também, referências na elaboração de materiais curriculares 2) currículo apresentado: orientações dadas em livros didáticos e/ou em outros materiais fornecidos por secretarias de educação, definidas por aqueles que traduzem e interpretam o significado e os conteúdos apresentados no currículo prescrito, de forma que chegue mais próximo à escola e ao professor. 3) currículo *moldado ou modelado*: definido por Sacristán (2000, p.105) como “O plano que os professores fazem do ensino, ou que entendemos por programação, é um momento de especial significado nessa tradução”. 4) currículo *em ação*: configura como o currículo praticado, a aula. 5) currículo realizado: consequência da prática pedagógica, está diretamente ligada à aprendizagem dos alunos, com resultados produzidos pela prática pedagógica e que também geram efeitos nos professores, como na reorganização de seus planejamentos. 6) currículo avaliado: está relacionado com a avaliação propriamente dita, mais especificamente com o que se priorizou avaliar. Momento em que se afere os avanços e as dificuldades apresentadas pelos estudantes, ressalta também determinados aspectos sobre outros e acaba determinando critérios para o ensino do professor e a aprendizagem dos alunos.

Nessa perspectiva, a partir dessas distintas instâncias, o currículo assume características amplas e não restritas a uma lista de conteúdos a serem trabalhados em um determinado nível ou modalidade de ensino. Salienta-se, que cada uma dessas instâncias definidas por Sacristán (2000) se relaciona com as outras, com certo grau de autonomia em seus funcionamentos, de ordem recíproca ou hierárquica no desenvolvimento curricular, se configurando como mediadoras no processo educativo.

Nesse mesmo direcionamento, Contreras (1989) afirma que o currículo diz respeito ao conjunto de decisões educativas para a escola. Dessa forma, o currículo deve ser entendido como um instrumento conceitual que procura responder questões, tais como: O que ensinar? Como ensinar? e Por que ensinar?

Diante dessa perspectiva ampla de currículo, o estudo aqui relatado buscou compreender as particularidades dos currículos de Matemática na EJA, bem como as relações existentes entre o que é proposto nos planos de ensino do professor, o que é feito na prática pedagógica e as implicações das propostas e práticas nas aprendizagens dos estudantes. O presente artigo é um recorte de uma pesquisa de doutorado que investigou as seis instâncias curriculares propostas por Sacristán (2000) e aqui serão discutidos, à luz da Teoria dos Campos Conceituais proposta por Vergnaud (1986), os currículos *moldados, em ação e realizados*, no que diz respeito à Combinatória no primeiro e segundo segmentos da EJA.

A Teoria dos Campos Conceituais e o raciocínio combinatório

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC), de Gérard Vergnaud, considerada por ele como uma teoria cognitivista, fornece uma estrutura teórica para analisar a formação e o funcionamento dos conhecimentos. Para Vergnaud (1982), os conceitos desenvolvem-se ao longo do tempo, através da experiência com distintas situações dentro e fora da escola. Assim, sua teoria oferece contribuições relevantes para a aprendizagem de conceitos em sala de aula, em particular de conteúdos matemáticos.

Para Vergnaud, sua teoria tem por objetivo:

Propiciar uma estrutura às pesquisas sobre atividades cognitivas complexas, em especial com referência às aprendizagens científicas e técnicas. Trata-se de uma teoria psicológica do conceito, ou melhor, da conceitualização do real, que permite situar e estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos, do ponto de vista de seu conteúdo conceitual (VERGNAUD, 1999, p.1).

De acordo com o autor supracitado, um campo conceitual define-se como um conjunto de situações em estreita conexão que requer conceitos, procedimentos e *representações simbólicas* em inter-relação simultânea. Nesse sentido, de acordo com a TCC, o indivíduo desenvolve a compreensão de conceitos dentro de um amplo contexto de problemas, sendo um conceito não ligado apenas a um tipo de situação, bem como uma determinada situação não apresenta um único conceito.

Os conceitos matemáticos traçam seus sentidos a partir de uma variedade de situações. E cada situação normalmente não pode ser analisada com a ajuda de apenas um conceito. Em outras palavras, nem um só conceito nem uma situação isolada dá conta do processo de aquisição de um conhecimento (VERGNAUD, 1996, p. 28).

Vergnaud (1986) defende a importância de se compreender um conceito a partir de um

tripé de três conjuntos interdependentes, composto por *situações* (S), que dão significado aos conceitos, conjunto de *invariantes* (I), que são propriedades lógico-operatórias que possibilitam a generalização e a transferência de aprendizagem e o conjunto de *representações simbólicas* (R), que são símbolos utilizados para representar o conceito. Esses aspectos do conceito (*situações, invariantes e representações simbólicas*) apontam para uma análise simultânea, estando interligados nas relações com outros conceitos.

Dentre esses campos conceituais está o das estruturas multiplicativas, que como todo campo conceitual, se constrói a partir de um amplo contexto de problemas que dão sentidos aos conceitos que estão em estreita conexão entre si. Dentre as situações que constituem o campo multiplicativo, destacam-se as referentes ao raciocínio combinatório, ponto central desse estudo. De acordo com Borba (2010), o raciocínio combinatório é uma forma de pensar sobre a Combinatória, e pode ser definida como um conjunto de conceitos que propicia a observação de situações de contagem, possibilitando a enumeração e esgotamento do número de possibilidades, a partir de conjuntos de elementos dados e de condições distintas de agrupamento desses elementos.

No presente estudo, usaremos a classificação indicada por Pessoa e Borba (2009), exemplificada a seguir.

- **Produto cartesiano, produto de medidas ou combinatória.**

Ex.: Maria tem 3 saias e 5 blusas. Quantos trajés diferentes ela pode formar combinando todas as saias com todas as blusas?

- **Permutação**

Ex.: Calcule o número de anagramas da palavra AMOR.

- **Arranjo**

Ex.: A semifinal da Copa do Mundo será disputada pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras distintas podemos ter os três primeiros colocados?

- **Combinação**

Ex.: Uma escola tem 9 professores, dos quais 5 devem representar a escola em um congresso. Quantos grupos de 5 professores pode-se formar?

É importante observar que cada um desses tipos de problema é caracterizado por específicas formas de escolha e de ordenação dos elementos que constituem as distintas possibilidades dentro das situações combinatórias.

Método

Para atingir os objetivos de analisar como a Combinatória é tratada nos currículos de

Matemática do Ensino Fundamental da Educação de Jovens e Adultos, à luz da Teoria dos Campos Conceituais proposta por Vergnaud (1986), foram realizadas entrevistas com professores que atuam no primeiro e segundo segmentos da EJA, bem como foram solicitados planos de ensino para duas aulas de Combinatória (currículo *modelado*), foram feitas observações da atuação dos professores em sala de aula (currículo *em ação*), contemplando também os efeitos dessas práticas de ensino (currículo *realizado*).

Participaram do estudo dois professores de uma escola pública do município de Olinda-PE, sendo uma professora do 1º segmento (P1) - Nível III (correspondente ao 4º e 5º anos do Ensino Fundamental) e um professor do 2º segmento (P2) - Nível V (correspondente ao 8º e 9º anos do Ensino Fundamental) da Educação de Jovens e Adultos. Assim como a escola, os docentes foram selecionados de modo aleatório.

Para a instância do currículo *moldado*, foi realizada entrevista individual junto a cada professor, bem como solicitados planos de ensino para duas aulas de Combinatória. O objetivo das entrevistas foi de identificar os conhecimentos e usos dos materiais curriculares, sondar os conhecimentos sobre o ensino e aprendizagem de Combinatória e analisar como os professores interpretam atividades de Combinatória apresentadas em livros didáticos da EJA, tomando como ponto de referência o tripé conceitual de Vergnaud (1986). No tocante aos planos de ensino, buscou-se identificar como os professores abordam os diferentes significados, *invariantes e representações simbólicas* da Combinatória na apresentação das propostas de ensino.

Nas instâncias do currículo *em ação* e *realizado* foram observadas práticas de ensino de Combinatória, que ocorreram de modo remoto e síncrono (devido à pandemia da Covid-19), nas turmas dos professores participantes da pesquisa. Foram observadas duas aulas de cada professor com a intenção de identificar a abordagem do conteúdo de Combinatória em relação ao tripé conceitual de Vergnaud (1986) (S, I, R), bem como verificar indícios de aprendizagem apresentados por estudantes no momento do ensino. Por fim, pode-se analisar as relações entre as instâncias do currículo *moldado, em ação e realizado* – propostas por Sacristán (2000).

Análise dos resultados

Entrevistas e planos de ensino – Currículo *moldado/modelado*

Nas entrevistas realizadas com os professores a respeito do perfil profissional, conhecimentos e usos de materiais curriculares e do ensino e aprendizagem da Combinatória

(*currículos modelados*), identificou-se que os dois professores entrevistados possuem graduação correspondente ao nível de ensino que atuam e pós-graduação em nível de mestrado. Ambos possuem bom tempo de experiência na docência em turmas de Educação de Jovens e Adultos, sendo 10 e 18 anos nos respectivos módulos da EJA. Quanto às experiências de aprendizados de conteúdos da Matemática em disciplinas cursadas na graduação e em formação continuada, observam-se vivências diferenciadas em virtude da formação inicial, no qual o professor do segundo segmento da EJA, com formação inicial em Ciência e habilitado para lecionar disciplinas exatas (Física, Química e Matemática), indicou experiência com conteúdos matemáticos, tanto na formação inicial como na formação continuada. Diferia-se, assim, da professora do primeiro segmento, que afirmou não recordar em seus processos formativos, inicial e continuado, o trabalho para atuação no ensino de Matemática.

Quanto ao conhecimento dos professores a respeito dos materiais curriculares e do ensino e aprendizagem da Combinatória (*currículos modelado e avaliado*), observou-se que ambos mencionaram conhecimento das prescrições curriculares específicas para EJA, assim como, afirmaram utilizá-las junto ao livro didático, em seus planos de ensino. No entanto, com base nas respostas dos professores ao longo das entrevistas, percebeu-se fragilidades no conhecimento a respeito das orientações referentes ao ensino da Matemática na EJA, e, em específico, da Combinatória.

Nas análises das atividades de Combinatória, retiradas de livros didáticos da EJA, verificou-se, tanto na professora do primeiro segmento quanto no professor do segundo segmento, o pouco conhecimento no que se refere ao conteúdo de Combinatória apresentado nesse recurso. Ao serem confrontados com as diferentes *situações*, os docentes não conseguiram identificar os diferentes tipos de problemas, bem como suas aproximações e distanciamentos. É importante destacar que P2 aparentava ter um pouco mais de conhecimento de Combinatória do que P1, mas não o suficiente para o ensino desse conteúdo. No que se refere às especificidades da EJA para o trabalho com a Combinatória, os professores apontaram como preocupação o enunciado dos problemas, evidenciando a debilidade na fluência de leitura dos estudantes, e destacaram a necessidade da contextualização dos problemas com situações cotidianas aos jovens e adultos dessa modalidade de ensino.

As dificuldades apresentadas por P1 e P2 corroboram com resultados obtidos por Borba, Pessoa, Rocha e Assis (2014), em um estudo com professores formados em Pedagogia, como também por Cunha, Lima e Rocha (2013) quando analisaram a compreensão de professores dos anos finais. O primeiro estudo aponta resultados de duas pesquisas, sendo uma de sondagem de

concepções e conhecimentos de professores de Pedagogia e o segundo de intervenção por intermédio de formação continuada. As autoras constataram que alguns professores dos anos iniciais apresentam pouco conhecimento do conteúdo de Combinatória, e também como se dá o desenvolvimento da compreensão do mesmo. Entretanto, foi apontado pelas autoras que o processo de formação continuada permite avanços referentes ao conhecimento do conteúdo e conhecimentos didáticos das diferentes *situações* que envolvem o raciocínio combinatório. No segundo estudo, foi analisada a compreensão de professores dos anos finais a respeito dos tipos de problemas combinatórios, considerando as etapas de escolhas. As autoras identificaram que os problemas de *arranjo* e *combinação* foram os que apresentaram o maior percentual de erros, pois os professores investigados tiveram dificuldades de diferenciar os *invariantes* desses problemas. Assim, destaca-se a importância da autoavaliação docente, quanto às suas fragilidades de formação inicial, na busca da melhoria de sua atuação profissional.

É importante destacar que Shulman (2005) explica que uma das fontes da base do conhecimento do conteúdo dos professores é sua formação acadêmica. Contudo, os saberes constituídos pelos futuros professores, em sua formação como estudante na educação básica, também influenciam na ação docente (TARDIF, 2002; SCHON, 2000). Salienta-se também, que o saber da experiência profissional dos professores, apontado por Tardif (2002) como fonte privilegiada do seu saber-ensinar, associa os conhecimentos obtidos em sua formação inicial às vivências de sua formação escolar.

Assim, é possível perceber que as fragilidades da formação inicial devem ser supridas na formação continuada, na qual segundo Fiorentini e Nacarato (2005, p.38), “a participação em projetos de formação continuada e a melhoria das condições profissionais e institucionais podem contribuir para a produção e (re)elaboração dos saberes necessários à mudança curricular”. Sendo assim, se faz necessária a garantia da oferta de formações continuadas compatíveis com as necessidades docentes e que estas abordem conteúdos e processos metodológicos, visando a melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem.

No que se refere a modelação da prática, é importante destacar que o professor tem a oportunidade de repensar suas ações, representá-las no papel para, em seguida, concretizá-las. Para facilitar a organização de um modelo prático de planificação de curricular, Sacristán e Gomez (1998) sugerem alguns elementos, como as metas e os objetivos, a decisão dos conteúdos, as tarefas ou oportunidades de aprendizagem, a apresentação do conteúdo e dos materiais, a produção exigida aos alunos, as considerações das diferenças individuais, a participação e o compromisso dos estudantes, a adequação ao cenário e a avaliação. É

importante destacar que os autores apontam esse modelo como uma sugestão que apresenta aspectos-chave do planejamento do currículo, destacando pontos decisivos que determinarão a prática docente a ser concretizada.

Na análise dos planos de ensino, foram observados avanços, tanto em P1 como em P2, no que se refere ao conhecimento do conteúdo de Combinatória. Os professores desenvolveram seus planejamentos de modo individual, sendo cada um responsável pela sua organização e estruturação. Não foi indicado ou sugerido nenhum material curricular de apoio para auxiliar os docentes na organização de suas práticas pedagógicas, entretanto as organizações das propostas apresentadas pelos professores foram bem semelhantes, apresentando o conteúdo, objetivos, procedimentos metodológicos, recursos e avaliação, tendo no documento do professor dos anos finais, um elemento a mais, a justificativa.

Quanto aos objetivos a serem atingidos nos processos de ensino e de aprendizagem no que se refere às diferentes *situações*, verificou-se nos documentos dos professores um direcionamento para o trabalho com *situações combinatórias*, sem explicitar o tipo de problema a ser desenvolvido. Entretanto, mesmo de forma indireta, é possível identificar no planejamento de P1 que a docente se refere a *situações de produto de medidas*. No tocante aos *invariantes*, percebe-se que os professores não fazem menção, de forma direta, aos *invariantes* da Combinatória, porém é possível inferir que a docente do primeiro segmento mencionou em seus objetivos a Combinatória associada a ideias de multiplicação, corroborando com o que é apresentado nas prescrições curriculares na esfera federal (Brasil, 2001). Já o professor do segundo segmento, apontou as propriedades envolvidas nos diferentes tipos de problemas, se reportando às especificidades das diferentes *situações* de Combinatória. A respeito das *representações simbólicas*, percebeu-se que P1 mencionou o trabalho com algoritmos, desenhos e listagens e P2 apontou, ao longo dos objetivos, procedimentos metodológicos e recursos a serem utilizados, o trabalho com as árvores de possibilidades, jogos, desafios e desenhos. É importante destacar que os docentes indicaram o trabalho com diferentes estratégias para compreensão das *situações* e desenvolvimento do raciocínio combinatório, sendo apontado por P1 o trabalho com a multiplicação direta e a listagem sistemática e P2 indicou o princípio multiplicativo.

No tocante aos procedimentos metodológicos que os professores planejaram desenvolver em sala de aula, verificou-se que os docentes não mencionaram nenhum tipo de situação combinatória e seus *invariantes* que seriam trabalhados. Entretanto, no que se refere a diferentes *representações simbólicas*, destacou-se a intencionalidade de trabalhar com variados

suportes. Evidenciou-se a preocupação em estimular o trabalho com diferentes estratégias na resolução de problemas, assim como a indicação da sistematização de listagem e o Princípio Fundamental da Contagem. Outro aspecto relevante diz respeito à coerência entre o que estava proposto a ser vivenciado com o que se pretendia verificar nos efeitos da prática de ensino.

Acredita-se que os dados obtidos quanto à modelação do currículo, referente às *situações, invariantes e representações simbólicas* da Combinatória, tanto de P1 quanto de P2, estão respaldados numa orientação de forma não aprofundada da Combinatória nos currículos prescritos e apresentados, como constatada por Martins e Borba (2021). O estudo analisou o conteúdo de Combinatória nas prescrições curriculares para EJA em âmbito nacional, estadual e municipal, e também em livros didáticos aprovados na última edição do PNLD EJA de 2014. As autoras apontam fragilidades nas orientações das prescrições curriculares no que se refere às diferentes *situações e invariantes* combinatórias, como também a baixa frequência dos problemas e a falta de orientações específicas do conteúdo nos manuais do professor. Esses achados, juntamente com a ausência de formações continuadas de conteúdos específicos e metodologias de ensino na EJA, refletem-se na fragilidade dos conhecimentos dos docentes.

As aulas e os efeitos da prática de ensino – Currículos em ação e realizados

O valor de qualquer currículo se concretiza na prática educativa a partir de situações reais, e reflete pressupostos e valores diversos. Sacristán (2000) destaca que “o currículo ao se tornar uma práxis, adquire significados definitivos para os alunos e para os professores nas atividades que uns e outros realizam e será na verdade aquilo que essa depuração permita que seja” (p.201). Dessa maneira, para que esse currículo adquira valor e significação para docentes e estudantes, é de extrema importância que este seja guiado pelos princípios da flexibilização. Assim, o professor transforma o conteúdo do currículo a partir de suas concepções epistemológicas, organizando-o e adequando-o visando o processo de aprendizagem de seus estudantes.

Os resultados das práticas provocados nos alunos são de ordem subjetiva, nem sempre diretamente visíveis (SACRISTÁN, 2013). São efeitos inferidos por meio de observação, exigindo dos sujeitos a manifestação, provocando respostas, como as provas de avaliação. O autor destaca que nem sempre os efeitos reais da aprendizagem são idênticos aos constatados ou avaliados, ou seja, os objetivos da educação e do ensino não correspondem de forma perfeitamente simétrica aos resultados de aprendizagem. Entretanto, o currículo realizado pode ser percebido pela análise dos efeitos das interações ocorridas em sala de aula.

A observação da prática docente e dos efeitos das práticas de ensino, aconteceu no mesmo formato para os dois segmentos, com duração aproximada de cada aula de 35 a 40 minutos, contendo uma média de 9 estudantes em cada aula. A composição da turma do primeiro segmento, era de adultos e idosos, já o segundo segmento, era composto por jovens e adultos.

Na análise realizada para as aulas do primeiro segmento, observou-se que dentre as diferentes *situações* combinatórias, P1 priorizou trabalhar com problemas de *produtos de medidas*, assim como mencionado em seu plano de ensino e prescrito nos documentos curriculares. Os problemas foram escritos no quadro e lidos para os estudantes. As atividades foram criadas pela professora e apresentavam contextos variados e apropriados à modalidade de ensino. É importante destacar que a docente procurou, no decorrer das aulas, interagir e estimular os estudantes na resolução dos problemas, questionando-os e desafiando-os quando necessário.

Identificou-se na prática docente de P1 uma progressão nas atividades propostas, na qual a professora iniciou sua primeira aula com problemas de *produto de medidas* que envolviam duas etapas de escolha e, após perceber o entendimento dos estudantes, na aula posterior, complexificou as *situações* apresentando problemas que envolviam três etapas de escolha, tais como:

- Problema de *produto de medidas* envolvendo duas etapas de escolha (escolha de condução no primeiro trajeto e escolha de condução no segundo trajeto):

João precisa ir ao Banco do Brasil da Encruzilhada. Para chegar ao banco, ele precisará escolher quais conduções irá utilizar. Sabemos que de Caixa D'água, bairro que João mora, ele tem duas opções de condução (ônibus ou micro-ônibus) até o terminal integrado, e do terminal integrado ele tem as opções de três linhas de ônibus (TI – Encruzilhada, TI - Cabugá e TI – Príncipe). Quais diferentes combinações de trajetos João poderá fazer para chegar até o Banco?

- Problema de *produto de medidas* envolvendo três etapas de escolha (escolha de salgado, escolha de bebida e escolha de sobremesa):

A lanchonete 'Que delícia' oferece um combo de um salgado + uma bebida + uma sobremesa por R\$10. As opções de salgados são: coxinha, batata frita e cachorro quente, as opções de suco são: suco de maracujá e suco de uva e as opções de sobremesa são: torta de chocolate e sorvete de morango. Quais combos podem ser montados usando uma opção de salgado, uma opção de suco e uma opção de sobremesa?

A escolha da Professora P1 em complexificar as situações à medida que percebia a

aprendizagem dos estudantes, ratifica os resultados obtidos em Lima e Borba (2018) que indicam que professores sugerem a apresentação inicial de problemas com quantidades menores a serem encontradas para que os alunos possam, aos poucos, ir desenvolvendo o raciocínio combinatório necessário para resolução dos diferentes problemas. Resultados de Vega e Borba (2015), apontam que as etapas de escolhas influenciam no desempenho dos estudantes e tornam os problemas mais complexos. Assim, foi possível perceber que a professora optou por ir gradativamente apresentando problemas com um grau maior de dificuldade.

No que se refere às propriedades *invariantes*, percebeu-se que P1 fez a discussão do invariante dos problemas de *produto de medidas*, quando, em diálogo com os estudantes, apontou a necessidade do uso de um elemento de cada conjunto para gerar nova possibilidade. É importante destacar, que a docente não deixou claro em suas orientações que essa se tratava de uma característica desse tipo específico de situação combinatória, provavelmente, por não ter abordado outras *situações*, como pode ser observado no trecho a seguir do diálogo com os estudantes:

Estudante 2: Professora, veja se é assim: coxinha + suco de maracujá + torta de chocolate.

P1: Isso mesmo. Essa é apenas uma opção de combo formado. O que vocês precisam no combo é de um salgado, uma opção de suco e uma opção de sobremesa.

No tocante às *representações simbólicas*, observou-se que a docente utilizou na resolução dos problemas, figuras, desenhos, listagens e a multiplicações diretas (como exposto na Figura 1 e Figura 2. É importante destacar que o uso das diferentes *representações simbólicas* e da estratégia de sistematização apresentadas pela professora, facilitou o entendimento e a resolução das *situações* apresentadas.

Figura 1: Exemplo de resolução utilizando



Fonte: A autora mediante observação da aula 2020

Figura 2: Exemplo de resolução utilizando desenho



Fonte: A autora mediante observação da aula 2020

Referente ao *currículo realizado*, ficou evidente que a professora P1 tinha uma boa relação com seus estudantes quando eles demonstravam confiança para expressarem seus raciocínios, até mesmo quando esses não estavam corretos. Foi possível identificar nos diálogos entre a professora e os estudantes, durante as aulas, demonstração da compreensão da sistematização dos elementos dos conjuntos das *situações de produto de medidas* trabalhadas, tanto nas que envolviam duas etapas de escolha como nas que envolviam três, como pode ser verificado nos trechos dos diálogos da docente com os estudantes a seguir:

- Sistematização envolvendo duas etapas de escolha:

Estudante 1: *Eu fiz assim: Coloquei a bola do sorvete de chocolate no casquinho e no copinho, depois coloquei outra bola do sorvete de morango no casquinho e no copinho, depois coloquei a bola do sorvete de amendoim no casquinho e no copinho e a última bola de sorvete de leite condensado no casquinho e no copinho. Está certo desse jeito?*

P1: *Sim! Muito bem. Você lembrou da aula passada.*

Estudante 3: *Eu fiz parecido.*

P1: *Como foi que você fez?*

Estudante 3: *Eu coloquei o casquinho com a bola de chocolate, depois o casquinho com a bola de morango, depois com a bola de amendoim e no final com a bola de chocolate. Tudo casquinho. Depois eu fiz a mesma coisa no copinho. Assim também está certo?*

P1: *Sim. Também está certo. Você conseguiu encontrar todas as combinações também.*

- Sistematização envolvendo três etapas de escolha:

Estudante 3: Professora, eu acho que está faltando coxinha + suco de maracujá + sorvete.

P1: Muito bem. Isso mesmo. Está faltando mais alguma? Será que organizamos direito as combinações?

Estudante 1: Acho que não.

P1: Isso mesmo. Esse problema tem mais elementos, então ele precisa de uma organização melhor. Alguém sabe como fazer uma organização melhor?

Estudante 3: Primeiro usa só um salgado e um suco e muda só a sobremesa.

P1: Excelente!

Lima e Borba (2018) indicam que a sistematização das informações no levantamento das possibilidades é uma estratégia muito importante que contribui para o desenvolvimento do raciocínio combinatório. P1 fez uso dessa estratégia e ressaltou o uso da mesma como meio de se encontrar todas as possibilidades requeridas.

Além da sistematização, foi possível perceber que os estudantes também demonstraram entendimento de como usar a multiplicação com mais de dois conjuntos, nas situações que envolviam três etapas de escolha para formação do lanche, como pode ser verificado no trecho do diálogo a seguir:

P1: Entenderam como faz?

Turma: Sim.

Estudante 1: Resolve os dois primeiros números, depois pega o resultado e resolve o outro número. É isso?

P1: Sim. Multiplica $3 \times 2 = 6$ e depois $6 \times 2 = 12$.

Na análise da prática docente do professor do segundo segmento da EJA, constatou-se a apresentação das diferentes *situações* combinatórias, *produto de medidas*, *permutação*, *arranjo* e *combinação*, sendo a sua primeira aula dedicada a problemas de *produto de medidas* envolvendo duas e três etapas de escolha e a segunda aula abrangendo *situações* de *permutação*, *arranjo* e *combinação*, como pode ser observado a seguir:

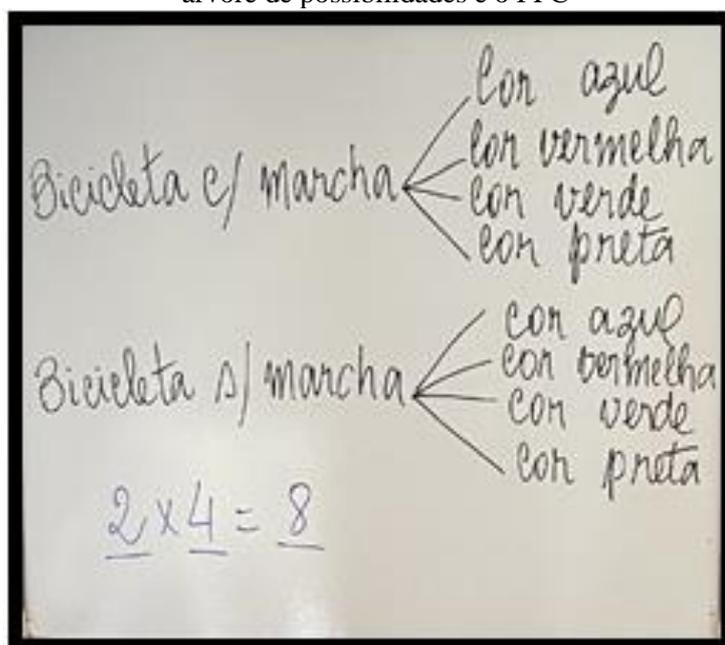
Salienta-se que, assim como P1, o docente fez a escrita dos problemas na lousa e em seguida a leitura para os estudantes. É importante ressaltar que em algumas atividades, o professor deixava a mesma estrutura de problema que já estava escrito na lousa e fazia mudanças apenas nas quantidades de elementos a serem combinados, abordando assim, um quantitativo maior de problemas. As situações utilizadas por P2 foram criadas pelo docente e/ou retiradas do livro didático que os estudantes utilizavam na escola e apresentavam contextos diversos e adequados à modalidade de ensino.

No que se refere aos *invariantes* da Combinatória, foi possível identificar abordagem aos

mesmos nos diálogos de P2 com os estudantes quando, na apresentação do problema de *arranjo*, o professor faz a comparação com a situação de *permutação*, anteriormente trabalhada. P2 chama a atenção dos estudantes explicando que o problema que envolvia a ocupação dos lugares do sofá (*situação de arranjo*) era diferente do problema que envolvia a senha (*situação de permutação*), na qual uma não era necessário usar todos os elementos ao mesmo tempo, devido à existência de mais pessoas do que lugares, e a outra, envolvia a utilização de todos os elementos ao mesmo tempo, os números para compor a senha. O professor salientou, ainda, que ambos poderiam ser resolvidos da mesma forma: utilizando o princípio multiplicativo. Resultados semelhantes foram obtidos em Lima (2015), quando professores dos anos finais do Ensino Fundamental indicaram as mesmas características em *situações de arranjo e permutação*.

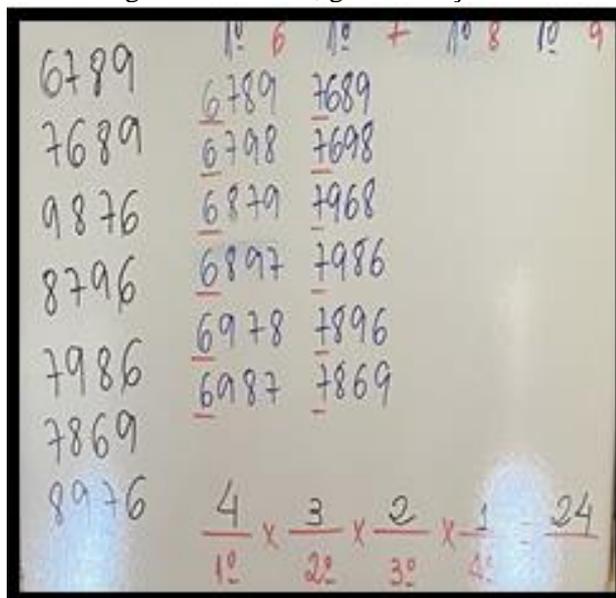
Quanto às *representações simbólicas*, foi possível observar que o docente utilizou a listagem sistemática e a árvore de possibilidades, como também utilizou o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e a generalização como estratégia de ensino. É importante destacar que P2 associou o Princípio Fundamental da Contagem a todas as situações trabalhadas, com exceção da situação de *combinação*. Resultados obtidos em Lima (2015) apontam o Princípio Fundamental da Contagem com uma eficiente estratégia de ensino para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, por possibilitar a resolução de diferentes tipos de problemas como exposto nas Figuras 3, 4, 5.

Figura 3: Exemplo de resolução de produto de medidas utilizando árvore de possibilidades e o PFC



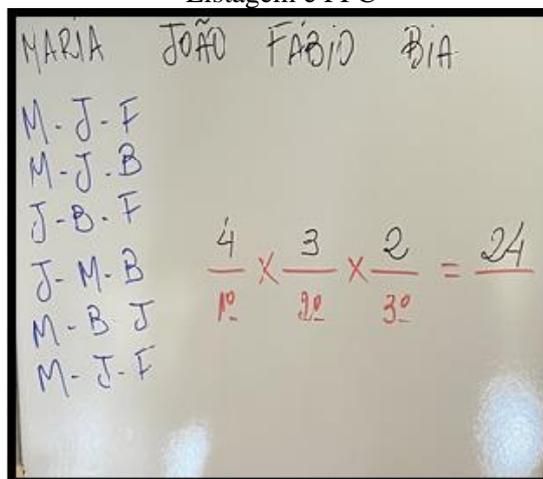
Fonte: A autora mediante observação da aula 2020

Figura 4: Exemplo de resolução de permutação utilizando Listagem sistemática, generalização e PFC



Fonte: A autora mediante observação da aula 2020

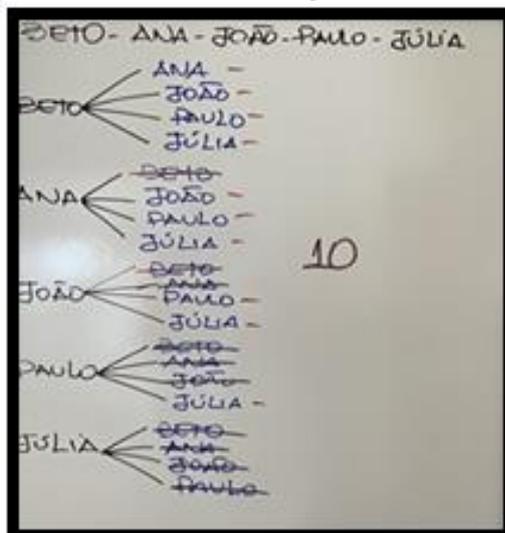
Figura 5: Exemplo resolução de arranjo utilizando Listagem e PFC



Fonte: A autora mediante observação da aula 2020

Entretanto, nas *situações de combinação*, de acordo com estudos de Rocha (2011) e Lima (2015), os professores demonstram dificuldades em diferenciar os *invariantes* das *situações de arranjo e combinação*, nos quais a ordenação pode, ou não, implicar em novas possibilidades. É possível observar na Figura 6, resolução de problema de *combinação* que o professor não utilizou nem mencionou o uso do PFC em sua resolução.

Figura 6: Exemplo de resolução de combinação
Envolvendo árvore de possibilidades



Fonte: A autora mediante observação da aula 2020

O motivo do professor não ter aplicado o PFC como estratégia na resolução do problema de *combinação* pode ter sido pelo fato que não se configura numa aplicação simples do PFC, exigindo a divisão pela *permutação* dos elementos repetidos.

Referente ao *currículo realizado*, ficou evidente nos diálogos entre professor e estudantes, ao resolveram problemas combinatórios, a compreensão do invariante de escolha, a construção do diagrama de árvore em diferentes *situações*, assim como o uso de PFC e da sistematização como estratégias para esgotamento das possibilidades, como pode ser observado no trecho do diálogo realizado pelo docente com os estudantes na resolução do problema de *combinação*, que envolvia a formação de duplas para representar os estudantes em um congresso.

P2: Entenderam a explicação?

Turma: Sim.

P2: Quais são as duplas que podemos formar combinando esses cinco estudantes? Vamos organizar as possibilidades fazendo a árvore?

Turma: Sim.

P2: Como começaremos?

Estudante 1: Pega primeiro Beto e faz dupla com todo mundo.

P2: Correto. E depois?

Estudante 1: Faz a mesma coisa com os outros. Pega Ana e combina com todo mundo, pega João, Paulo e Julia e combina com todo mundo.

P2: Isso mesmo. E como eu escrevo aqui?

A partir das observações das aulas (*currículo em ação*), foi possível identificar coerência na prática de ensino com o que fora planejado (*currículo modelado*) para o primeiro

e segundo segmentos da EJA, como também foram apresentados indícios de aprendizagens dos estudantes (*currículo realizado*) referentes aos objetivos de ensino apontados pelos docentes.

Considerações

No desenvolvimento desse estudo buscou-se analisar como a Combinatória é tratada nos currículos *moldados* (planos de ensino), *em ação* (práticas de ensino) e *realizados* (efeitos das práticas de ensino), tendo como base dessa análise o tripé conceitual (S, I, R) de Vergnaud (1986), ou seja, diferentes *situações*, suas propriedades *invariantes* e *representações simbólicas*.

O conjunto de resultados obtidos no estudo, tanto de P1 como de P2, parece reforçar aproximações as situações, invariantes e representações simbólicas (VERGNAUD,1986), presentes nas distintas instâncias curriculares propostas por Sacristán (2000) no que se refere ao conteúdo de Combinatória nos dois segmentos da EJA – o que não favorece o aprofundamento da Combinatória tratada. Essa relação entre a TCC e as instâncias curriculares permitiu ressaltar a necessidade nas reformulações nos marcos legais da EJA, principalmente referente às prescrições curriculares, à reestruturação dos livros didáticos, assim como aos processos de formações continuadas que contemplem especificidades dessa modalidade de ensino, para que a prática pedagógica possa contribuir amplamente no desenvolvimento do raciocínio combinatório de estudantes jovens e adultos.

Pelo observado e analisado, defende-se uma abordagem da Combinatória desde o início de escolarização dos estudantes da EJA. Embora seja um conteúdo fortemente trabalhado no Ensino Médio, é preciso introduzir essa forma de pensamento bem mais cedo. Argumenta-se que o contato precoce com esse conteúdo pode possibilitar um desenvolvimento mais amplo desse tipo de raciocínio, a partir de um contato constante, perpassando por todos os segmentos da Educação de Jovens e Adultos – iniciando desde das primeiras fases/níveis do Ensino Fundamental da EJA, possibilitando maior aprofundamento nos anos finais desse nível de ensino e consolidando-o no Ensino Médio. Desse modo, não se pretende apenas a aprendizagem de um conteúdo matemático, mas, sim, o desenvolvimento de formas de pensamento que lhes possibilitem a compreensão de mundo, o entendimento de suas realidades e o pensamento crítico para suas atuações na sociedade.

Referências

BORBA, R. O Raciocínio Combinatório na Educação Básica. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM**. Bahia, 2010.

BORBA, R.; PESSOA, C.; ROCHA, C.; ASSIS, A. A formação de professores de anos iniciais do Ensino Fundamental para o ensino da Combinatória. **Revista Paranaense de Educação Matemática**. Campo Mourão, PR, v. 3, n. 4, jan.- jun. pp.115-137. 2014.

BRASIL. **Educação para Jovens e Adultos: ensino fundamental: proposta curricular - 1º segmento**. Brasília: MEC, 2001.

CONTRERAS, D.J. **Que e como ensinar?** O curriculum como local de experimentação e área de conflito. Quina. 1989.

CUNHA, M.; LIMA, A. P.; ROCHA, C. Raciocínio combinatório: compreensão dos professores dos anos finais do Ensino Fundamental. **Anais 21**. In: Encontro de Pesquisa Educacional do Norte e Nordeste - EPENN. Recife.2013.

FIORENTINI, D.; NACARATO, A. (orgs.). **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática: investigando e teorizando a partir da prática**. Musa Editora, São Paulo, 2005.

FONSECA, M.C. F.R. **Educação Matemática de Jovens e Adultos**. Belo Horizonte/MG: Autêntica, 2002.

LIMA, A. P. **Princípio Fundamental da Contagem: Conhecimentos de professores de Matemática sobre seu uso na resolução de situações combinatórias**. 2015. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica), Universidade Federal de Pernambuco. UFPE. Recife, 2015.

LIMA, E.T.; Borba, R. Relações entre o Raciocínio Combinatório e o Raciocínio Probabilístico na EJA. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 7, p. 33-60, 2018.

MARTINS, G; BORBA, R. Do prescrito ao apresentado: A Combinatória no currículo dos anos iniciais da EJA. **Revista Perspectiva em educação Matemática**, v.15, n.36, 2021.

PESSOA, C.; BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1a a 4a série. **Zetetiké – Cempem – FE – Unicamp**, v. 17, jan - jun, p.105-147. 2009.

ROCHA, C. **Formação docente e o ensino de problemas combinatórios: diversos olhares, diferentes conhecimentos**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. UFPE. – Recife, PE, 2011.

SACRISTÁN, J. G.; GÓMEZ, P. A. I. **Compreender e transformar o ensino**. 4º ed. São Paulo: Artmed, 1998.

SACRISTÁN, J. G. **O currículo: uma reflexão sobre a prática**. 3. ed., Porto Alegre: Artmed,

2000.

SACRISTÁN, J. G. **Saberes e incertezas sobre o currículo**. Porto Alegre: Penso, 2013.

SHÖN, D. **Educando o profissional reflexivo: um novo design para o ensino e a aprendizagem**. Porto Alegre: Artmed, 2000.

SHULMAN, L. S. Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. Profesorado. **Revista de Currículum y Formación de Profesorado**. v.9, n.2, Granada, España, pp.1-30, 2005.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2002.

VERGNAUD, G. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. *In*: Carpenter, Thomas, Moser, Joseph & Romberg, Thomas. (Eds.), **Addition and subtraction: a cognitive perspective**. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum, 1982

VERGNAUD, G. **Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. um exemplo: as estruturas aditivas**. *Análise Psicológica*, 1, p. 75-90. 1986.

_____. A teoria dos campos conceituais. Em J. Brum (org.) **Didáctica das Matemáticas** (155-191). Lisboa: Horizontes Pedagógicos. 1996.

_____. Teoria dos campos conceituais. *In*: **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**. Rio de Janeiro, 1999 (tradução).

Recebido em: 28 de novembro de 2021
Aprovado em: 18 de março de 2022