

DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO, EM NÍVEL TEÓRICO, MEDIADO PELO CONCEITO DE FRAÇÃO A PARTIR DA GRANDEZA COMPRIMENTO

DOI: <https://doi.org/10.33871/22385800.2021.10.21.393-417>

Josélia Euzébio da Rosa¹
Waldeir Amorim Albino²

Resumo: Investigou-se o desenvolvimento do pensamento matemático, em nível teórico, por estudantes do curso de Pedagogia de uma universidade localizada no sul do estado de Santa Catarina, Brasil. Realizou-se um experimento didático desenvolvimental, com um semestre de duração. Os conceitos foram abordados no contexto de seus sistemas conceituais, a partir da relação entre grandezas, no movimento de redução do concreto ao abstrato e ascensão do abstrato ao concreto por meio das quatro ações de estudo propostas por Davýdov. Na especificidade do presente artigo, focou-se no desenvolvimento do pensamento matemático, em nível teórico, mediado pelo conceito de fração a partir da grandeza comprimento. Durante o experimento, os acadêmicos revelaram a gênese do conceito de número fracionário a partir da grandeza comprimento e abstraíram em nível teórico. Entendeu-se que tal grau de abstração deve-se ao experimento objetal. As modelações gráfica e literal refletiam a essência revelada durante a modelação objetal.

Palavras-chave: Teoria Histórico-Cultural. Formação Inicial de Professores. Educação Matemática. Conceito de Fração.

DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL THOUGHT, AT THEORETICAL LEVEL, MEDIATED BY THE CONCEPT OF FRACTION, FROM THE LENGTH QUANTITY

Abstract: We investigate the development of mathematical thought, at the theoretical level, by students of the Pedagogy course of a university located in the south of the State of Santa Catarina, Brazil. We performed a developmental didactic experiment, with a semester duration. The concepts were approached in the context of their conceptual systems, based on the relationship between quantities, in the movement of reduction from concrete to abstract and ascension from abstract to concrete through the four study actions proposed by Davýdov. In the specificity of this article, we focus on the development of mathematical thought, at the theoretical level, mediated by the concept of fraction, from the length greatness. During the experiment, scholars revealed the genesis of the concept of fractional number, from the length greatness and abstracted at the theoretical level. We understand that such a degree of abstraction is due to the objective experiment. The graphic and literal modeling reflected the essence revealed during the objectal modeling.

Keywords: Historical-Cultural Theory. Initial Teacher Education. Mathematical Education. Fraction Concept.

Projeto coletivo: contexto teórico

O presente artigo faz parte de um projeto coletivo mais amplo desenvolvido no

¹ Doutora em Educação pela Universidade Federal do Paraná (UFPR). Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação e do curso de Pedagogia da Universidade do Sul de Santa Catarina (UNISUL). E-mail: joselia.euzebio@yahoo.com.br – ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5738-8518>

² Especialista em Inovação na Educação pela Universidade do Sul de Santa Catarina (UNISUL). Professor de Matemática na Educação Básica. E-mail: waldeir_lg@hotmail.com – ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4803-1266>

contexto de um Grupo de Pesquisa³ que tem como finalidade refletir sobre as limitações do modo de organização do ensino vigente no Brasil e suas possibilidades de superação a partir dos fundamentos e desdobramentos da Teoria Histórico-Cultural. Na especificidade da disciplina de Matemática, por exemplo, atualmente predomina o desenvolvimento de um pensamento empírico em detrimento do pensamento teórico (SANTOS, 2017).

No contexto do pensamento empírico, os conceitos matemáticos são abordados descontextualizados da própria Matemática, por meio de uma sequência linear, fragmentada, a partir da relação direta e superficial entre objetos e fenômenos com os símbolos e operações tomadas como uma sequência de procedimentos a serem realizados sem compreensão do que gera tais procedimentos e com qual finalidade (DAVÍDOV, 1982).

O pensamento teórico, por sua vez, vai além da aparência dessa sequência de procedimentos e adentra na essência por meio de respostas às seguintes perguntas: qual a gênese? Qual o percurso de desenvolvimento até atingir seu estágio atual? Por quê? Para quê? A serviço de quem esse conhecimento pode ser colocado? Responder a tais perguntas, por meio da organização do ensino, requer a compreensão da síntese histórica dos conceitos, como eles se articulam e conformam os sistemas conceituais em nível contemporâneo de desenvolvimento. Tal síntese, no âmbito de todos os conceitos matemáticos abordados desde a educação básica, parte da relação entre grandezas discretas e contínuas por meio da articulação entre as significações aritméticas, algébricas e geométricas (ROSA, 2012).

Na perspectiva do pensamento teórico também há uma sequência a ser seguida, porém, não é linear, é dialética, tal como preconiza a lógica que sustenta a Teoria Histórico-Cultural. À luz da lógica dialética, de acordo com Kopnin (1978, p. 163), o movimento de redução do concreto ao abstrato e a ascensão do abstrato ao concreto é a “lei universal do desenvolvimento do conhecimento humano”.

O conhecimento não pode passar imediatamente do sensorial concreto ao concreto no pensamento. Esse caminho, como todos os outros, é complexo e contraditório. Para atingir a concreticidade autêntica, o conhecimento perde temporariamente a concreticidade em geral e passa ao seu próprio oposto: o abstrato (KOPNIN, 1978, p. 158).

De acordo com Kopnin (1978), é incorreto relacionar o sensorial com o empírico e o racional com o teórico. No ensino, desde o experimento sensorial o foco deve estar voltado

³ Grupo de Pesquisa Teoria do Ensino Desenvolvidor (TedMat/UNISUL). O referido grupo, juntamente com o Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma abordagem Histórico-Cultural (GEPMAHC) da Universidade do Extremo Sul Catarinense (UNESC), faz parte da Unidade Catarinense da rede nacional de grupos de pesquisa intitulada Grupo de Estudos e Pesquisas sobre a Atividade Pedagógica (GEPAPe) da Universidade de São Paulo (USP).

para a revelação da essência dos conceitos e sistemas conceituais. E a revelação da essência não ocorre nos limites do pensamento empírico. A confusão do movimento do conhecimento do empírico ao teórico com a transição do concreto ao abstrato tem gerado, e continua gerando, uma concepção deturpada da essência do pensamento teórico, da sua capacidade para representar o objeto de forma multilateral e profunda (KOPNIN, 1978; DAVÍDOV, 1982).

O mundo objetivo é conteúdo do pensamento. Na especificidade da Matemática, as grandezas e formas do mundo objetivo constituem o conteúdo do pensamento matemático. O pensamento humano surgiu e se desenvolveu historicamente em base sensorial material. Portanto, o pensamento é racional, mas leva em seu bojo um momento contrário, o sensorial (KOPNIN, 1978). Na especificidade da educação escolar:

[...] Os escolares reproduzem o processo real pelo qual os homens criam os conceitos, imagem, valores e normas. Por isso, o ensino escolar de todas as disciplinas deve estruturar-se de maneira que, em forma concisa, abreviada, reproduza o processo histórico real de generalização e desenvolvimento dos conhecimentos (DAVÍDOV, 1988, p. 174).⁴

Mas, “o pensamento não deve simplesmente fotografar o processo histórico real com todas as suas casualidades, ziguezagues e desvios” (KOPNIN, 1978, p. 184). A dialética materialista, “[...] com base na unidade do histórico e do lógico, define o início do conhecimento e o sucessivo caminho de seu movimento” (KOPNIN, 1978, p. 184). O histórico é “o processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento” (KOPNIN, 1978, p. 183). “O lógico [...] é o reflexo abstrato, liberado de casualidades e ziguezagues, do desenvolvimento histórico do objeto” (DAVÍDOV, 1988, p. 63).

A unidade do lógico e do histórico, no contexto da educação escolar, está relacionada ao movimento que possibilitou a origem e o desenvolvimento dos conceitos científicos, até atingir o estágio mais elevado de abstração e generalização alcançado pela ciência na contemporaneidade.

A atividade de estudo, “como as outras formas de atividade reprodutiva das crianças, consiste em uma das vias de realização da unidade do histórico e do lógico no desenvolvimento da cultura humana” (DAVÍDOV, 1988, p. 166). Nesta perspectiva, uma das principais atribuições da educação escolar é propiciar às crianças, adolescentes, jovens e adultos o acesso e a compreensão dos conceitos científicos que potencializam o

⁴ As traduções da obra de Davíдов da língua espanhola para a língua portuguesa são de nossa responsabilidade.

desenvolvimento do pensamento teórico contemporâneo. Mas, para contemplar os conceitos científicos na educação escolar, o professor precisa organizar o ensino a partir dos conceitos espontâneos elaborados durante a experiência pessoal da criança? Entende-se que não, pois a escola é lugar para aprender o novo, aquilo que o estudante não sabe, mas tem condições de aprender se o ensino for devidamente organizado (VIGOTSKI, 2001).

De acordo com Vigotski (2001, p. 263), “a relação dos conceitos científicos com a experiência pessoal da criança é diferente da relação dos conceitos espontâneos”. Os conceitos científicos “surgem e se constituem no processo de aprendizagem escolar por via inteiramente diferente que no processo de experiência pessoal da criança” (VIGOTSKI, 2001, p. 263). Porque “na escola a criança não aprende o que sabe fazer sozinha, mas o que ainda não sabe e lhe vem a ser acessível em colaboração com o professor e sob sua orientação. O **fundamental na aprendizagem** é justamente o fato de que a criança aprende o **novo**” (VIGOTSKI, 2001, p. 231, grifos nossos).

O desenvolvimento dos conceitos científicos não repete as mesmas vias dos conceitos espontâneos. Começa “justamente pelo que ainda não foi plenamente desenvolvido nos conceitos espontâneos” (VIGOTSKI, 2001, p. 345). E “segue por uma via oposta àquela pela qual transcorre o desenvolvimento do conceito espontâneo da criança” (VIGOTSKI, 2001, p. 344-345). Portanto, “[...] é ilegítimo transferir conclusões baseadas em conceitos espontâneos para os conceitos científicos [...]” (VIGOTSKI, 2001, p. 234).

Para Vigotski (2001, p. 259), é um equívoco “transferir a lei do desenvolvimento dos conceitos espontâneos para o ensino escolar”. Os conceitos científicos, formados no processo de aprendizagem escolar, “distinguem-se dos espontâneos por outro tipo de relação com a experiência da criança, outra relação sua com o objeto, e por outras vias que eles percorrem do momento da sua germinação ao momento da formação definitiva” (VIGOTSKI, 2001, p. 263).

A relação que existe entre conceitos espontâneos e científicos é do ponto de vista do desenvolvimento da criança e não do ponto de vista lógico:

O desenvolvimento dos conceitos científicos deve apoiar-se forçosamente em um determinado nível de maturação dos conceitos espontâneos, que não podem ser indiferentes à formação de conceitos científicos simplesmente porque a experiência imediata nos ensina que o desenvolvimento dos conceitos científicos só se torna possível **depois** que os conceitos espontâneos da criança atingiram um nível próprio **do início da idade escolar**. Por outro lado, cabe supor que o surgimento de conceitos de tipo superior, como o são os conceitos científicos, não pode deixar de influenciar o nível dos conceitos espontâneos **anteriormente constituídos**, pelo simples fato de que não estão encapsulados na consciência da criança, não estão separados uns dos outros por uma muralha intransponível, não fluem por

canais isolados mas estão em processo de interação constante, que deve redundar, inevitavelmente, em que as generalizações estruturalmente superiores e inerentes aos conceitos científicos não resultem em mudança das estruturas dos conceitos científicos (VIGOTSKI, 2001, p. 261, grifos nossos).

Os conceitos espontâneos seguem do particular para o geral e os científicos, do geral para o particular (DAVÍDOV, 1982). “Vias diferentes de desenvolvimento, que transcorrem em condições diferentes, não podem levar a resultados absolutamente idênticos” (VIGOTSKI, 2001, p. 266).

Nesse sentido, como organizar o ensino dos conceitos científicos a ser desenvolvido com as crianças, desde o primeiro ano de escolarização, de modo que supere o desenvolvimento alcançado via apropriação dos conceitos espontâneos, formados durante as vivências diárias, fora do ambiente escolar? A partir deste e outros questionamentos, um grupo de pesquisadores “liderados por D. B. Elkonin e V. V. Davíдов” (REPKIN; REPIKINA, 2019, p. 27) criou a Teoria do Ensino Desenvolvidor⁵ com base na Lógica Dialética, Teoria Histórico-Cultural e Teoria da Atividade.

Também à luz dos fundamentos da Teoria Histórico-Cultural, o professor Manoel Oriosvaldo de Moura, da USP, propôs a Atividade Orientadora de Ensino.

A Atividade Orientadora de Ensino constitui-se um modo geral de organização do ensino, em que seu conteúdo principal é o conhecimento teórico e seu objeto é a constituição do pensamento teórico do indivíduo no movimento de apropriação do conhecimento. Assim, o professor, ao organizar ações que objetivam o ensinar, também requalifica seus conhecimentos, e é esse processo que caracteriza a Atividade Orientadora de Ensino como unidade de formação do professor e do estudante (MOURA *et al.*, 2016, p. 115).

Como proposta teórico-metodológica, a Atividade Orientadora de Ensino deve conter em sua estrutura a síntese histórica do conceito, os recursos didáticos, a análise e a síntese coletiva durante a realização de situações desencadeadoras de aprendizagem (MOURA, 1996).

A situação desencadeadora de aprendizagem consiste em uma proposta organizada pelo professor que, a partir de seus objetivos de ensino, conduz o movimento conceitual a ser apropriado pelos estudantes por meio de um problema de aprendizagem (MOURA *et al.*, 2016).

⁵ Repkin e Repikina (2019, p. 27) denominam de Teoria da Aprendizagem Desenvolvidor. Porém, no Grupo de Pesquisa atual optou-se por manter a escrita apresentada na tradução das obras de Davíдов do russo para o espanhol: Teoria do Ensino Desenvolvidor. São termos com significados muito diferentes: um tem foco na aprendizagem e o outro, no ensino.

A Secretaria Estadual de Educação de Santa Catarina, Brasil, desde 1991 adota, em seus documentos curriculares, o arcabouço teórico anteriormente apresentado. Porém, de modo geral, no ensino comumente desenvolvido nas escolas catarinenses, assim como no restante do país, prevalecem os fundamentos da lógica formal tradicional, objetivados nos conceitos espontâneos e no pensamento empírico (SANTOS, 2017). O teor empírico perpetua no ensino superior, inclusive nos cursos de formação de professores (ISIDORO, 2019).

Conforme alerta o currículo catarinense, “o acesso à educação escolar não é garantia de desenvolvimento do pensamento teórico, visto que, dependendo da lógica que fundamenta o conteúdo e os métodos de ensino desenvolvidos em sala de aula, pode-se obter como resultado o pensamento empírico” (SANTA CATARINA, 2019, p. 126).

O pensamento empírico não condiz com o estágio atual de desenvolvimento da ciência contemporânea.

[...] a tarefa da escola contemporânea não consiste em dar às crianças uma soma de fatos conhecidos, mas em ensiná-las a orientar-se independentemente na informação científica e em qualquer outra. Isto significa que a escola deve ensinar os alunos a pensar, quer dizer, desenvolver ativamente neles os fundamentos do pensamento contemporâneo para o qual é necessário organizar um ensino que impulsiona o desenvolvimento (DAVÍDOV, 1988, p. 3).

Ao assumir como nossa a tarefa da escola contemporânea proposta por Davíдов (1988), e conduzidos pelos pressupostos teóricos supracitados, surgiram alguns questionamentos: como tornar realidade no ensino os fundamentos teóricos estudados? Como concretizar tais fundamentos? Enfim, pretendia-se saber como fazer, como colocar a teoria em prática. Era realmente a palavra *como* que perseguia, por isso foi incorporada ao problema de pesquisa: como organizar o ensino de Matemática com potencialidades para promover a aprendizagem de conceitos científicos e o desenvolvimento do pensamento teórico?

Ressalta-se que a palavra *como* aqui é concebida de acordo com os fundamentos teóricos anunciados. Desse modo, a resposta teórica ao problema anunciado requer um modo geral de organização do ensino objetivado em uma experiência particular. E não uma sequência de procedimentos, tal como procede o pensamento empírico.

As pesquisas ocorrem nos diversos níveis de escolarização, desde a educação básica até o ensino superior (FREITAS, 2016; SANTOS 2017). Mas, no presente artigo, apresentar-se-ão os resultados de uma investigação que se realizou na formação inicial de professores, no contexto do curso de Pedagogia de uma universidade localizada no sul do estado de Santa Catarina, Brasil.

Portanto, no processo de busca por respostas ao problema de pesquisa coletivo, no contexto da formação inicial de professores, tomou-se como fio condutor o seguinte objetivo geral: investigar o desenvolvimento do pensamento matemático, em nível teórico, por estudantes do curso de Pedagogia.

Em consonância com os fundamentos da Teoria Histórico-Cultural, o método que sustenta as ações de pesquisa, ensino e extensão é o materialista histórico-dialético. Este método, ao seguir a lógica dialética, incorpora e supera a lógica formal. Uma das principais características deste método consiste na premissa de que o fenômeno investigado deve ser considerado em sua totalidade, na indissociabilidade entre teoria e prática.

A metodologia de pesquisa adotada foi o experimento didático desenvolvimental. Tal metodologia está atrelada à compreensão de que é pelo ensino que se aprende e ao aprender se desenvolve. Porém, não se trata de qualquer ensino, mas de um ensino organizado com base nos conteúdos e métodos que possibilitem a promoção do desenvolvimento do pensamento teórico nos estudantes (crianças, adolescentes, jovens, adultos e idosos) a partir da apropriação de conhecimentos científicos.

Essa metodologia de pesquisa proposta por Davídov (1988) permite ao pesquisador investigar o desenvolvimento dos seres humanos no processo de ensino e aprendizagem. Ainda de acordo com Davídov (1988), o experimento didático desenvolvimental caracteriza-se pela intervenção ativa do pesquisador nos processos que ele investiga. Assim, difere-se essencialmente do experimento de constatação, que destaca só o estado já formado e presente nos estudantes.

Essa proposta de “investigação aparece como metodologia de educação e ensino experimentais que impulsionam o desenvolvimento” (DAVÍDOV, 1988, p. 196). A realização do experimento didático desenvolvimental pressupõe a projeção e modelação da relação essencial dos conceitos no processo de aprendizagem. Durante a investigação, estuda-se também o movimento de origem e desenvolvimento de novos conceitos e sistemas conceituais, conforme será apresentado na sequência.

Projeto coletivo: contexto experimental

Realizou-se, ao longo do semestre 2020/2, um experimento didático desenvolvimental⁶ com trinta e quatro acadêmicos do quarto e sexto semestres, matriculados

⁶ O termo desenvolvimental está relacionado ao desenvolvimento do pensamento teórico como superação, por incorporação, do pensamento empírico.

na Unidade de Aprendizagem (disciplina) Fundamentos e Metodologias de Matemática para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, na forma remota. No primeiro dia de aula apresentou-se o projeto e todos aceitaram participar/colaborar.

Trata-se de uma turma bem diversificada do ponto de vista de idade, com estudantes de 18 até 48 anos. Na abertura do semestre, a maioria da turma já estava em início da carreira docente, por meio de estágios remunerados e professor auxiliar de estudante com necessidades especiais. Muitos dos acadêmicos relataram que passaram por dificuldades ao aprender Matemática na educação básica, que se transformou, ao longo dos anos, em aversão a essa ciência. Tal aversão provocou ansiedade e preocupação com o início da Unidade de Aprendizagem de Matemática no curso de Pedagogia. Ao longo do semestre as inseguranças provocadas pelas experiências negativas anteriormente vivenciadas foram gradual e parcialmente arrefecidas.

As aulas foram realizadas nas terças-feiras, das 19h15min até as 22h30min, via plataforma *zoom*, em função da pandemia causada pelo vírus SARS-CoV-2. Além dos trinta e quatro acadêmicos, também participaram do experimento quinze pesquisadores do TedMat na condição de docente/pesquisador. As aulas eram gravadas no próprio aplicativo e disponibilizadas pela professora titular para os estudantes e pesquisadores. Ao todo, foram quinze encontros, em cada encontro um pesquisador ou dupla assumiu a docência compartilhada com a professora titular da Unidade de Aprendizagem.

O plano de ensino da Unidade de Aprendizagem apresenta três objetivos mais amplos: expandir a necessidade, por parte dos licenciandos, de aprender; desenvolver o pensamento teórico, a autonomia intelectual e a atividade criativa; e promover o desenvolvimento dos diferentes modos de compreensão, reflexão e análise. No contexto destes objetivos mais amplos estudam-se os fundamentos do modo de organização do ensino para orientar o processo de aprendizagem nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e desenvolver: 1) as bases do pensamento matemático científico; 2) os conceitos da Matemática como linguagem universal; 3) a modelagem aritmética, algébrica e geométrica de fenômenos e processos; 4) o pensamento lógico; 5) a cultura algorítmica; 6) a imaginação espacial; 7) a capacidade de construir argumentos; 8) a formulação de perguntas; 9) a capacidade de analisar situações em termos de propriedades matemáticas; 10) a realização de relações quantitativas e espaciais entre objetos para construir um algoritmo e encontrar informações; 11) a capacidade de resolver problemas por meio de modelos universais de resolução de problemas; 12) a capacidade de planejar; 13) o interesse pela Educação Matemática e o desejo por desenvolver os conhecimentos matemáticos, em nível teórico, na docência futura.

As habilidades pretendidas, de acordo com o plano de ensino, são: habilidade de aprender de forma autônoma e pensar teoricamente; necessidade de autodesenvolvimento contínuo; personalidade criativa; organização da própria atividade de estudo, por meio de definição de metas de aprendizagem e modos de ação de estudo; compromisso ético com o processo de aprendizagem do conhecimento científico e do desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes; leitura crítica do modo de organização de ensino tradicionalmente desenvolvido no Brasil; reconhecimento das possibilidades de superação do modo de organização de ensino empírico pelo desenvolvimental no contexto da atividade de estudo.

Do ponto de vista metodológico, as aulas foram realizadas por meio do estudo dialógico a fim de possibilitar a interação entre os participantes da aprendizagem. Para tanto, a sugestão era que as câmeras dos sujeitos da aprendizagem fossem mantidas abertas durante as aulas, para que todos pudessem interagir com todos, inclusive com uma aluna surda, e os microfones deveriam ser abertos somente nos momentos de manifestação na forma oral. A interação com a aluna surda se dava com o auxílio de uma intérprete de Libras.

Durante as aulas, os sistemas conceituais matemáticos foram desenvolvidos a partir de Situações Desencadeadoras de Aprendizagem em consonância com os fundamentos teóricos assumidos. Entende-se por sistemas conceituais aqueles conceitos que são interconectados.

Portanto, nas aulas não apenas se refletia sobre os fundamentos teóricos referentes ao modo de organização de ensino, mas se viviam estes fundamentos. Eles estavam encarnados, objetivados no desenvolvimento de cada Situação Desencadeadora de Aprendizagem desenvolvidas coletivamente, com a participação da maioria dos(as) acadêmicos(as).

A organização do processo educativo ocorreu por meio de momentos de estudos prévios, realizados individualmente ou em grupos, e diálogo de estudos coletivos durante as aulas. O material para leitura prévia era postado no sistema acadêmico da turma com antecedência para que todos pudessem realizar o estudo prévio individualmente. As aulas foram desenvolvidas com todos e por todos, por meio de uma ação conjunta. Portanto, no coletivo e para o coletivo. Todos os acadêmicos foram protagonistas do seu próprio processo de aprendizagem e desenvolvimento. Além disso, foram corresponsáveis pelo processo de aprendizagem e desenvolvimento dos colegas por meio da ação colaborativa.

Durante a solução de cada Situação Desencadeadora de Aprendizagem (tarefa de estudo)⁷, foram desenvolvidas as quatro ações de estudo propostas por Davídov (1982). Ao longo da realização de cada ação, os estudantes eram instigados a propor questões, formular

⁷ Concebeu-se Situação Desencadeadora de Aprendizagem como tarefa de estudo, aquela que desencadeie o movimento proposto por Davídov nas quatro ações de estudo.

diferentes hipóteses de solução e confirmar ou refutar tais hipóteses, conforme segue.

Primeira ação de estudo: revelação dos dados que compõem a relação essencial do sistema conceitual a partir do estudo com as grandezas

A primeira ação de estudo consiste na transformação dos dados da tarefa, com a finalidade de revelar a relação essencial do objeto estudado a partir da relação entre grandezas discretas e contínuas. De acordo com Davídov (1988), a relação entre grandezas consiste na gênese de todos os conceitos matemáticos a serem desenvolvidos nos primeiros anos de escolarização. Consoante o autor em referência, todos os números, no campo dos reais, tiveram sua origem, historicamente, a partir da relação entre grandezas. Portanto, tanto os números quanto a operacionalização com estes no ensino deve tomar como ponto de partida a relação entre grandezas. A transformação dos dados da tarefa de estudo [da Situação Desencadeadora de Aprendizagem] tem como finalidade revelar a relação essencial do conceito teórico, portanto, no âmbito de seu sistema conceitual.

Em outras palavras, em consonância com a lógica dialética, nesta primeira ação se experimenta o aspecto real da relação essencial que atuará como base genética, como fonte do conceito teórico, portanto, do seu sistema conceitual. “A ação de estudo examinada, em cuja base se encontra a análise mental, tem ao começo a forma de transformação dos dados objetivos da tarefa de estudo (esta ação mental se realiza, ao começo, em forma objetual-sensorial)” (DAVÍDOV, 1988, p. 182).

Porém, ainda na primeira ação de estudo, segundo Davídov (1982, p. 157), deve-se revelar a “essência abstrata da matemática” para que os estudantes possam fazer abstrações e “aproveitar sua força teórica” nas ações seguintes.

Segunda ação de estudo: modelação da relação entre os elementos que compõem a essência do sistema conceitual nas formas objetual, gráfica e literal (algébrica)

A segunda ação de estudo consiste na modelação da relação essencial nas formas objetual, gráfica e literal. Os elementos revelados na primeira ação são modelados na segunda. Davídov (1988, p. 182) destaca “que os modelos de estudo constituem uma conexão internamente imprescindível no processo de compreensão dos conhecimentos teóricos e dos procedimentos generalizados de ação”. No entanto, adverte que nem toda representação consiste em um modelo de estudo, somente aquela representação que reflete a relação

essencial do conceito em estudo no contexto de seu sistema conceitual.

No modelo de estudo se representa a relação essencial, encontrada e abstraída no processo de transformação dos dados da tarefa, o conteúdo deste modelo fixa as características internas do objeto, não observáveis de maneira direta. O modelo de estudo, como produto da análise mental, pode ser depois um meio especial da atividade mental do homem (DAVÍDOV, 1988, p. 183).

A partir do modelo, em forma universal, é possível transformá-lo, conforme ocorre na terceira ação de estudo.

Terceira ação de estudo: transformação do modelo da relação essencial para o estudo de suas propriedades

Na terceira ação de estudo o trabalho com o “modelo aparece como o processo pelo qual se estudam as propriedades da abstração substancial da relação essencial” (DAVÍDOV, 1988, p. 183). Ao transformar o modelo, os estudantes revelam o sistema conceitual no qual está inserido o conceito em estudo.

A orientação dos estudantes, para a interconexão da relação interna geradora de outros modelos a partir do modelo revelado na primeira ação, “serve de base para formar neles certo procedimento geral destinado a resolver a tarefa de estudo e assim formar o conceito sobre a ‘célula’ inicial deste objeto” (DAVÍDOV, 1988, p. 183). O núcleo da célula inicial consiste naquela conexão interna que possibilita deduzir outros modelos a partir da modelação realizada na segunda ação de estudo. Portanto, a célula inicial é composta por todos os modelos que podem ser deduzidos a partir da relação essencial.

Entretanto, a adequação da ‘célula’ a seu objeto é revelada quando dela se extraem as diversas manifestações particulares do objeto. Em relação com a tarefa escolar isto significa deduzir sobre sua base um sistema de diferentes tarefas particulares, durante cuja resolução os escolares concretizam o procedimento geral anteriormente encontrado e, com ele, o conceito correspondente (a ‘célula’). Por isso, a seguinte ação de estudo consiste na dedução e na construção de um determinado sistema de tarefas particulares (DAVÍDOV, 1988, p. 183).

Na primeira ação de estudo, o ponto de partida é o concreto real (relação entre grandezas). Pelo movimento de redução do concreto ao abstrato, por meio de sucessivas abstrações, atinge-se a sua forma universal, na segunda ação de estudo, no modelo do procedimento geral, na forma algébrica. Na terceira ação de estudo, inicia-se o procedimento de ascensão do abstrato ao concreto. Porém, o procedimento de concretização é concluído na

quarta ação de estudo.

Quarta ação de estudo: construção de um sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas pelo procedimento geral revelado na primeira ação, modelado na segunda e transformado na terceira

Na quarta ação de estudo, concretiza-se o procedimento geral, tanto para revelar a relação de multiplicidade e divisibilidade quanto para a resolução de tarefas particulares. Ocorre, portanto, a elaboração e resolução de novas tarefas particulares, inclusive a resposta ao problema desencadeador.

Graças a esta ação os escolares concretizam a tarefa de estudo inicial e a convertem na diversidade de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento único (geral), compreendido durante a realização das anteriores ações de estudo. O caráter eficaz deste procedimento se verifica, justamente, na solução de tarefas particulares; os estudantes as enfocam como variantes da tarefa de estudo inicial e imediatamente, como se fosse ‘de golpe’ separam em cada uma a relação geral, orientando-se pela qual podem aplicar o procedimento geral de solução apropriado (DAVÍDOV, 1988, p. 183).

As ações anteriormente apresentadas, quando devidamente organizadas pelo professor, conduzem o pensamento dos estudantes no movimento orientado do geral ao particular, por meio do procedimento de redução do concreto ao abstrato e ascensão do abstrato ao concreto. Neste se reconstitui o movimento lógico histórico não só da origem, mas também do desenvolvimento dos conceitos e seus respectivos sistemas conceituais até atingir o estágio contemporâneo. A partir das ações de estudo anteriormente apresentadas, elaborou-se um esquema geral para servir como orientação no desenvolvimento de cada Situação Desencadeadora de Aprendizagem, cujo fio condutor consiste no movimento de redução do concreto ao abstrato e ascensão do abstrato ao concreto em torno da essência do conceito, no contexto de seu sistema conceitual. Não se trata de uma sequência engessada de passos a serem seguidos, mas de um modo geral de organização do ensino para orientar de onde se deveria partir, por onde se deveria percorrer e aonde se deveria chegar. Não se trata de um movimento linear, mas dialético, marcado por avanços e retrocessos e que poderia sofrer alterações. Por exemplo, em algumas Situações Desencadeadoras de Aprendizagem tomou-se um problema para desencadear a realização de cada ação. Portanto, quatro problemas desencadeadores no contexto de uma única Situação Desencadeadora de Aprendizagem.

Além disso, durante o desenvolvimento das quatro ações de estudo foram realizadas as

ações de controle e avaliação (DAVÍDOV, 1988). O controle e avaliação da aprendizagem foram realizados pela professora titular da Unidade de Aprendizagem, pelos professores pesquisadores do TedMat e pelos acadêmicos (autoavaliação/reflexão). A avaliação e o controle exerceram um papel importante no processo de aprendizagem e desenvolvimento.

Em todas as aulas foi considerada a função subsidiadora da avaliação e do controle para o processo de aprendizagem e desenvolvimento. Por esta razão, cabia, tanto à professora quanto aos professores pesquisadores e acadêmicos, avaliarem a efetivação, ou não, da aprendizagem.

A avaliação foi processual, formativa e diagnóstica. Durante o desenvolvimento das aulas, os acadêmicos refletiam coletivamente sobre seus erros e acertos, compreendiam as causas dos erros e buscavam estratégias para chegar à solução correta da Situação Desencadeadora de Aprendizagem. Assim, gradativamente, tornaram-se autônomos no processo de estudo. A autoavaliação possibilitou o desenvolvimento da responsabilidade perante a aprendizagem, assim como o compromisso com o estudo. Além disso, foram realizadas avaliações individuais. Estas foram realizadas no intervalo entre um encontro e outro e possibilitaram que a professora titular pudesse identificar aqueles estudantes que estavam com dificuldades, mas que não conseguiam manifestá-las no coletivo. Estes eram atendidos em aulas extras. Após o diagnóstico das dificuldades e as reflexões com estes estudantes sobre estas dificuldades, geralmente na aula seguinte já conseguiam acompanhar o coletivo.

Da totalidade à unidade de análise e o isolado da pesquisa

Organizou-se o experimento didático desenvolvimental por meio de Situações Desencadeadoras de Aprendizagem e estudo prévio de um texto que subsidiasse as reflexões que seriam realizadas em aula. Os conceitos matemáticos, tais como número, adição, subtração, multiplicação, divisão... não foram abordados separadamente, mas em seus respectivos sistemas conceituais. Não se separou um momento ou parte das aulas para falar sobre os fundamentos teóricos do modo de organização do ensino, como ocorre no ensino tradicional. As reflexões sobre os fundamentos teóricos, estudados previamente pelos estudantes, emergiam durante as aulas, a partir da objetivação destes no modo de organização do ensino em desenvolvimento. Além de desenvolverem Situações Desencadeadoras de Aprendizagem, os acadêmicos também elaboraram as suas próprias, pois se entende que passa pela formação de professores não só a solução dos problemas já existentes, mas também a

proposição de novos problemas desencadeadores de aprendizagem.

Diante da impossibilidade de abarcar todo o experimento didático desenvolvimental nos limites de um artigo, elegeu-se uma unidade de análise que consiste na essência dessa totalidade: o desenvolvimento do pensamento matemático, em nível teórico, por acadêmicos do curso de Pedagogia.

De acordo com Vigotski (2001, p. 8), na busca por compreender o fenômeno em sua totalidade, “[...] decompõe em unidades a totalidade complexa. [...] Um produto de análise que, diferente dos elementos, possui todas as propriedades que são inerentes ao todo e, concomitantemente, são partes vivas e indecomponíveis dessa unidade”. Essa proposta, possibilitou revelar a essência do fenômeno investigado no movimento de redução do concreto ao abstrato e ascensão do abstrato ao concreto.

Durante o semestre, as Situações Desencadeadoras de Aprendizagem foram desenvolvidas a partir do estudo de grandezas discretas e contínuas, tais como comprimento, valor monetário, área, volume, tempo e ângulo.

A título de exemplificação, no presente artigo será apresentada a Situação Desencadeadora desenvolvida a partir da grandeza comprimento durante uma aula com início às 19h15min e término às 22h30min. Trata-se de um isolado (CARAÇA, 1951), que reflete o movimento e as relações fundamentais da unidade de análise.

Desse modo, na sequência, apresentou-se o isolado referente ao desenvolvimento do pensamento matemático, em nível teórico, mediado pelo conceito de fração a partir da grandeza comprimento.

Segundo Davídov (1982), a gênese do conceito de número natural é a mesma do conceito de número racional: a partir do estudo das grandezas. Optou-se pela grandeza comprimento, porque, conforme Freudenthal (1975, p. 211), é “a mais matemática das grandezas” e um dos conceitos fundamentais da geometria. A partir da medição da grandeza comprimento, considerou-se uma situação na qual a unidade não cabe quantidade de vezes inteira na grandeza a ser medida.

O isolado referente ao desenvolvimento do pensamento matemático, em nível teórico, mediado pelo conceito de fração a partir da grandeza comprimento é composto por quatro episódios. Cada episódio corresponde a uma ação de estudo.

Os episódios são “aqueles momentos em que fica evidente uma situação de conflito que pode levar à aprendizagem do novo conceito” (MOURA, 1996, p. 77). Os episódios são compostos por cenas que retratam o movimento do fenômeno e as mudanças na forma de pensamento.

A fonte de dados consiste na transcrição, na íntegra, das manifestações dos(as) acadêmicos(as), da professora titular e do professor/pesquisador a partir da gravação do *zoom*. Todos os acadêmicos aceitaram participar da pesquisa. A fim de preservar a identidade destes acadêmicos, será utilizada a letra A, de acadêmico, seguida de um número para referenciá-los.

Desenvolvimento

Às 19h15min iniciou-se a aula com a seguinte pergunta: qual é maior $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{2}$? Foi solicitado que respondessem no *chat* do *zoom*. A maioria afirmou equivocadamente que $\frac{1}{4}$ é maior que $\frac{1}{2}$ sob a justificativa de que quatro é maior que dois. A partir destas respostas, alguns professores de Matemática poderiam dizer: o problema do ensino de Matemática no Brasil são os pedagogos, eles não sabem Matemática. Já se ouviu essa afirmação algumas vezes em cursos de formação continuada. Diante desta afirmação, questionou-se: o pedagogo foi aluno de quem ao longo da segunda etapa do Ensino Fundamental e durante o Ensino Médio? Foi aluno do professor de Matemática. Mas como alguém que passa tantos anos estudando com um professor de Matemática, que considera que o problema dessa disciplina é o pedagogo, e chega ao final do Ensino Médio sem saber qual é maior $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{2}$ (SANTOS, 2017)

Entendeu-se que não faz sentido buscar culpados, que a solução não está nessa busca. Foi necessário repensar o modo de organização do ensino de Matemática no país e ascender ao nível teórico. Foi com esta perspectiva que se elaborou a Situação Desencadeadora de Aprendizagem intitulada Retorno às aulas presenciais. Trata-se de uma tarefa de estudo que pode ser introduzida a partir das reflexões relacionadas à disciplina de Matemática, mais especificamente sobre o conceito de números racionais na forma fracionária (Figura 1).

Figura 1: Situação Desencadeadora de Aprendizagem.

Retorno às aulas presenciais



Olá, acadêmicos e acadêmicas, tudo bem com vocês? Espero que sim!

Sou o professor Walter e preciso da ajuda de vocês. Como todos sabem, a Covid19 vem causando muita preocupação em todo o mundo. Diversas pessoas já foram infectadas e muitas delas perderam a vida. As orientações para manter o distanciamento social muitas

vezes não são cumpridas, o que acaba acarretando em novas infecções.

Na volta às aulas presenciais, para evitar a disseminação descontrolada do vírus, teremos que cumprir várias recomendações, uma delas é que os estudantes deverão estar a uma distância segura uns dos outros.

O pessoal da Secretaria de Educação veio aqui e deixou duas carteiras na distância que devo deixar as demais. Mas aqui na escola não temos instrumentos de medição como régua, metro, trena, entre outros. Como devo proceder para medir a distância que eles deixaram entre as duas carteiras e repetir a mesma distância no restante da sala?

Um grande abraço do professor Walter.

Fonte: Elaboração dos autores, 2020.

Embora seja uma situação particular vivenciada hipoteticamente pelo professor Walter, sua escrita está na forma geral. Não há valores predeterminados para as medidas envolvidas no problema. Isso ocorre porque o objetivo não é apresentar um número como resposta numérica ao professor Walter, mas o procedimento geral de solução que possibilita a medição de qualquer comprimento, em qualquer contexto e com qualquer unidade de medida. A situação do professor Walter é apenas um elemento desencadeador das reflexões.

Após a leitura e reflexão sobre a Situação Desencadeadora de Aprendizagem, sistematizou-se, com os estudantes do curso de Pedagogia, um dos possíveis modos de solução com base no movimento conceitual proposto por Rosa (2012), Freitas (2016), Santos (2017) e Isidoro (2019) para o desenvolvimento das ações de estudo sobre o conceito de fração, conforme segue.

Cena 1 - primeira ação de estudo: transformação dos dados da tarefa de estudo com a finalidade de revelar a relação essencial do objeto estudado

A primeira ação de estudo consiste na transformação dos dados do problema com a finalidade de revelar a relação essencial do objeto estudado, “[...] certa relação universal do objeto estudado, o que deve ser refletido no correspondente conceito teórico” (DAVÍDOV, 1988, p. 182).

Iniciou-se a primeira ação com a seguinte problematização: em que consiste a carta? Quais são os problemas abordados? Durante as reflexões, os estudantes concluíram que seria necessário medir o comprimento da distância entre as carteiras. Neste momento, expôs-se o *slide* no qual constavam duas carteiras e suas respectivas cadeiras.

Informou-se que o professor Walter não tinha instrumentos de medida padronizados em sua escola. As opções que surgiram foram: um palmo e o comprimento de seu passo. Ambas foram refutadas. O palmo, por ser uma unidade de medida muito pequena e o passo

pela instabilidade de sua medida, pois poderia variar a distância entre as carteiras e assim não garantir uma distância segura entre elas.

A1 - Porque se for pra gente pensar em passos, pode ser que o meu passo pode ser maior que o da outra pessoa [sic].

A sugestão aceita por todos foi um pedaço de barbante. Assim como ocorreu no desenvolvimento histórico da humanidade (CARAÇA, 1951), durante a primeira ação surge a necessidade de um instrumento para mediar o processo de medição (SANTOS, 2017; ISIDORO, 2019).

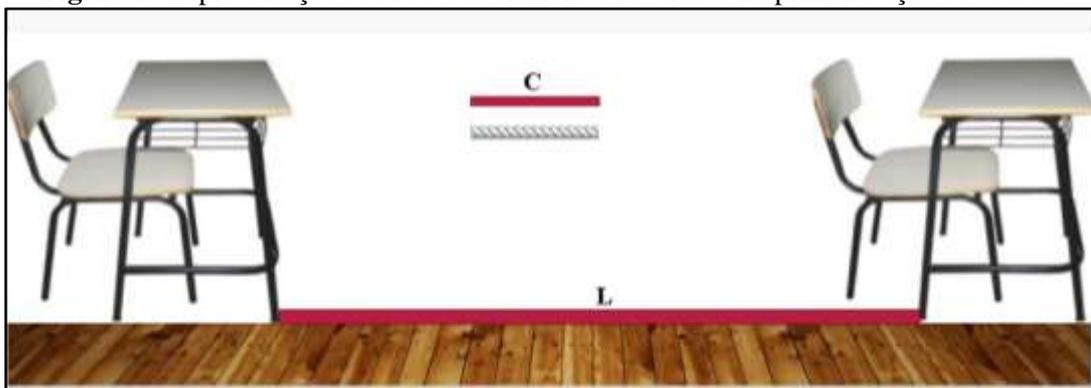
A8 – O nosso instrumento de medida deve ser maleável, né, pra que a gente consiga dobrar, a gente tem que demonstrar pra criança como faz esse procedimento. [sic]

A16 – Como a gente já falou, usando o barbante, né. [sic]

A11 – Pode ser que chegue lá no final e não caiba um barbante inteiro. Então a gente vai ter que chegar em uma fração, a gente vai ter que dividir esse barbante pra poder calcular quanto vai caber dentro daquele pedacinho que faltar. A gente tá usando a medida comprimento, então a gente tem que usar algo semelhante à grandeza comprimento. [sic]

Ao analisarem o contexto da medição, algumas acadêmicas previram a necessidade de extrapolar os limites dos números naturais. Logo no enunciado da Situação Desencadeadora de Aprendizagem constava um dos elementos da relação essencial em estudo: o comprimento da distância entre uma mesa e outra. Durante as reflexões, a fim de satisfazer a necessidade vivenciada pelo professor Walter, surgiu o segundo elemento, a unidade de medida (pedaço de barbante), sob a justificativa de que barbante sempre tem nas escolas. Foram expostos estes dois elementos no *slide* e questionou-se: mas, quanto mede a unidade de medida? E quanto mede o comprimento da distância entre as carteiras? Por se tratar de valores desconhecidos, os estudantes sugeriram letras para representá-los, conforme segue (Figura 2):

Figura 2: Representação abstrata dos elementos revelados na primeira ação de estudo.



Fonte: Elaboração dos autores, 2020.

Após a representação por meio de letras refletiu-se sobre a relação de desigualdade entre as duas medidas de comprimento: $L > C$ e $C < L$. Mas, quanto L é maior que C ? Ou, quanto C é menor que L ? Quantas vezes C cabe em L ? Se dividir o L em partes iguais a C , quantas partes haverá? A partir das reflexões sobre as questões anteriores, surgiu o terceiro elemento da relação essencial do conceito de número, o resultado da medição, a partir da relação entre divisibilidade e multiplicidade entre as medidas L e C . De acordo com Rosa (2012), os três elementos que constituem a relação essencial que dá origem a todos os números no campo dos reais são: uma grandeza a ser medida, uma unidade de medida e o resultado da medição. Após a revelação destes elementos, prosseguiu-se para a segunda ação de estudo.

Cena 2 - segunda ação de estudo: modelação da relação essencial nas formas objetual, gráfica e literal

A segunda ação de estudo consiste na modelação da relação essencial nas formas objetual, gráfica e literal. A relação de multiplicidade e divisibilidade foi revelada na primeira ação de estudo. Mas como representá-la no plano objetual?

A7 – Tem que saber quantos têm de barbante primeiro, ou tem que saber quantos cabem do começo até o fim ali.

A18 – A gente tem que saber quantas vezes o C cabe em L , né. [sic]

A8 – Tem que realizar o experimento objetual, ver quantas vezes o barbante vai se encaixar ali.

Para saber a distância entre as carteiras expostas no *slide*, mediu-se com o barbante e marcou-se com um traço cada unidade de medida, até atingir a distância total entre as carteiras, ou seja, até detectar quantas vezes a medida C cabia na medida L (Figura 3).

Figura 3: Modelação objetual da relação essencial.



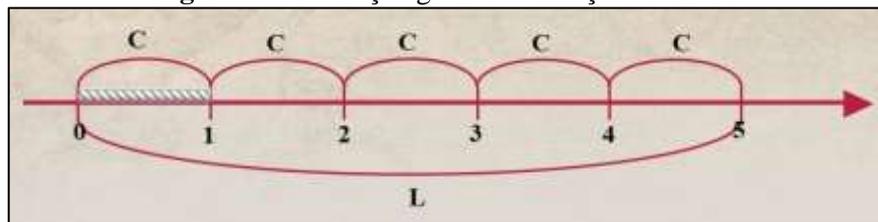
Fonte: Elaboração dos autores, 2020.

Assim, durante a execução da medição, os acadêmicos constataram a quantidade de vezes que a unidade cabia (divisibilidade) ou se repetia (multiplicidade) na grandeza em

medição: cinco unidades.

A introdução do conceito a partir das grandezas discretas e contínuas é primordial para a apropriação do conceito de fração. Na primeira ação de estudo, os elementos revelados foram abstraídos ao serem representados por letras. Agora, faz-se necessária uma nova abstração, porém da relação entre estes elementos. Inicialmente, sugeriu-se que os estudantes representassem esta relação na reta numérica (Figura 4):

Figura 4: Modelação gráfica da relação essencial.



Fonte: Elaboração dos autores, 2020.

A opção pela grandeza comprimento se deu em função de ela possuir uma relação interna com a reta numérica, uma vez que a finalidade da equipe consistia em revelar a gênese do conceito de número no contexto matemático:

A11 – Pode usar uma reta numérica. Cada unidade de barbante que a gente vai acrescentando em L, vai adicionando na reta.

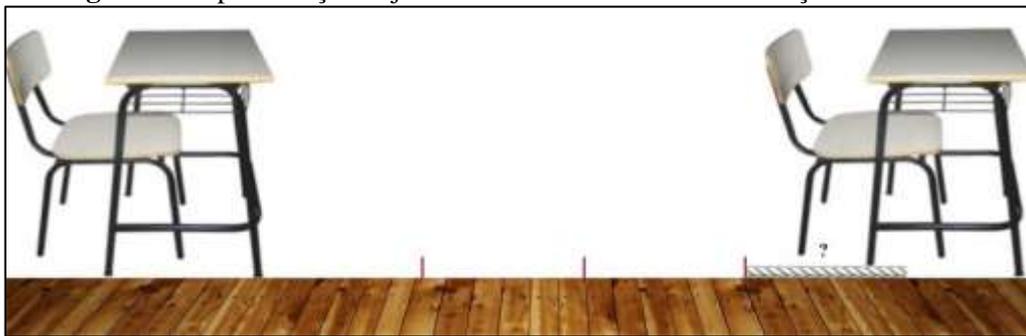
Com a representação na reta numérica no *slide* (Figura 4), realizaram-se os seguintes questionamentos: quantas vezes a unidade de medida (C) coube no comprimento da distância entre as carteiras (L)? L é igual a quantos C? Quantas vezes L foi dividido em partes iguais a C? A conclusão dos acadêmicos foi que $\frac{L}{C} = 5$ e $L = 5C$. Estes modelos refletem uma situação particular na qual a unidade de medida cabe cinco vezes na grandeza a ser medida. Porém, no processo de abstração faz-se necessário atingir a abstração máxima da relação essencial. Esta é atingida no contexto das seguintes reflexões: como representar a relação entre os valores L e C para qualquer medição, independentemente do seu resultado? Considerando n o resultado desconhecido das infinitas possibilidades da medição, tem-se o seguinte modelo literal: $\frac{L}{C} = n$ e $L = Cn$.

Na primeira ação de estudo, ficou combinado que seria sugerida ao professor Walter a utilização de um barbante e, na segunda ação, partiu-se do pressuposto que o comprimento do barbante caberia um número inteiro de vezes no comprimento da distância entre as carteiras. Mas, se não couber, como o professor Walter poderá proceder?

Cena 3 - terceira ação de estudo: transformação do modelo da relação essencial para o estudo de suas propriedades

Na terceira ação, introduziu-se a necessidade de transformação do modelo da relação essencial revelada na primeira ação e modelada na segunda a partir da seguinte hipótese: e se a unidade de medida não couber uma quantidade inteira de vezes, como o professor Walter deverá proceder? Assim como na ação anterior, procedeu-se à medição da mesma distância entre as carteiras, porém o comprimento da unidade de medida um pouco maior (Figura 5):

Figura 5: Representação objetual da necessidade de transformação do modelo.



Fonte: Elaboração dos autores, 2020.

Qual o resultado da medição anterior (Figura 5)? Como expressar, por meio de número, o resultado da medição anterior? A primeira sugestão foi cortar o barbante até atingir uma medida que caiba uma quantidade exata de vezes no comprimento da distância entre as carteiras. Após concluírem que esse processo poderia ser muito demorado, optaram por verificar que tanto do barbante coube na parte em que ele não coube inteiro, conforme a seguinte cena:

A7 - Não deu inteiro!

A8 - Tem que dividir o barbante, né? [sic]

A4 - A grandeza L termina na carteira, mas a C termina após a carteira.

A4 - Pode dobrar.

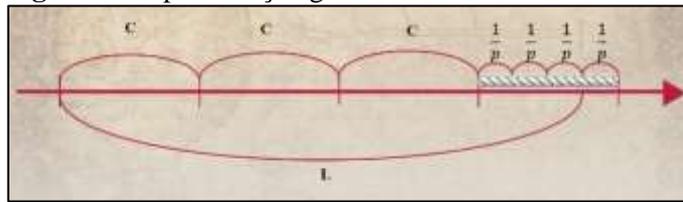
A19 - Em partes iguais, né? [sic]

A4 - Daí estabelece uma unidade de medida intermediária.

A9 - A ideia é usar a fração, por isso devemos dobrar o barbante pra que sobre um pedaço pra gente incluir definitivamente a fração. [sic]

Primeiro dividiram o barbante em duas partes iguais. Ao constatarem que duas partes não seriam suficientes, dividiram por quatro e representaram o processo na reta numérica (Figura 6):

Figura 6: Representação gráfica do modelo transformado.



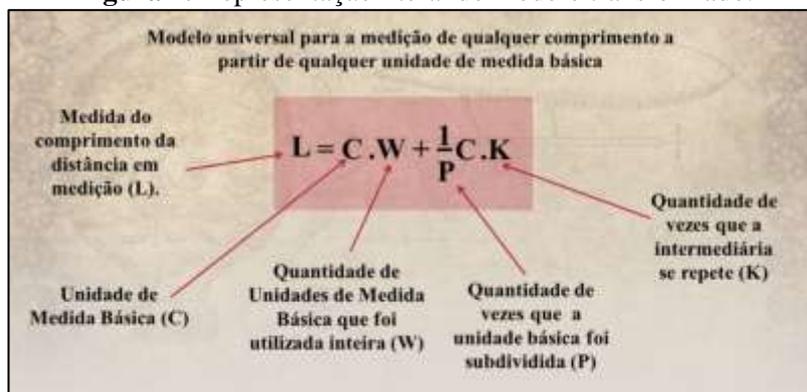
Fonte: Elaboração dos autores, 2020.

A partir da representação na reta numérica (Figura 6), questionou-se: em quantas partes a unidade de medida básica (C) foi dividida? Quantas unidades intermediárias ($\frac{1}{p}$) foram utilizadas na última aplicação de C sobre L ? Quantas partes de C foram utilizadas? Qual é o valor aritmético da medida até então desconhecida e representada algebricamente pela letra L ? A partir das reflexões, a turma concluiu, de forma adequada, que $L = 3C + \frac{3}{4}C$, com a seguinte justificativa:

- A4 – Porque foi três C inteiros, o outro foi subdividido em quatro partes, deu três quartos de C . [*sic*]
- A7 – Três C mais três quartos de C .
- A5 – Três mais três quartos.

Na cena anterior, as acadêmicas justificam o porquê de cada elemento do modelo a que chegaram. Porém, o modelo $L = 3C + \frac{3}{4}C$ reflete uma situação particular na qual a unidade de medida básica cabe três vezes inteiras, mais três quartos dela. No entanto, qual seria o modelo válido para qualquer situação, independentemente da quantidade de unidades de medidas básicas e intermediárias? As reflexões foram conduzidas com base em Santos (2017) e atingiu-se com a turma a seguinte síntese (Figura 7):

Figura 7: Representação literal do modelo transformado.



Fonte: Elaboração dos autores, 2020.

⁸ $C =$ Uma unidade
 W, K e $P \in \mathbb{N}^*, 0 < K < P$
 $L \in \mathbb{Q}_+^*$

Ao atingir o modelo geral, válido para a medição de qualquer comprimento a partir de qualquer unidade de medida básica, inclusive as padronizadas, a turma concluiu a terceira ação de estudo.

Nesta terceira ação, o número fracionário foi introduzido a partir da medição em que a unidade de medida básica não cabia um número inteiro de vezes no comprimento da distância entre as carteiras. Porém, o procedimento utilizado para introdução do número fracionário foi o mesmo adotado na segunda ação de estudo para o número natural. Isso porque, de acordo com Rosa (2012), a relação essencial que dá origem ao número natural é a mesma que dá origem ao número racional.

Após a transformação do modelo, ocorre, na quarta ação de estudo, a generalização teórica por meio da elaboração de novas tarefas que podem ser resolvidas por meio do procedimento geral revelado e abstraído nas ações anteriores.

Cena 4 - quarta ação de estudo: construção de um sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral

Na quarta ação de estudo, faz-se necessário refletir sobre outras situações, outras grandezas e outros contextos. Diante dos limites de páginas do presente artigo, será apresentado a seguir um exemplo pensado com a turma: supôs-se que, ao medir a distância entre as carteiras, o professor Walter tenha aplicado sobre a medida L cinco barbantes inteiros. Ao final da medição, dividiu o barbante em seis partes iguais e utilizou apenas 4 destas partes. Qual será o resultado dessa medição? A partir do modelo transformado, é possível concluir que $L = 1.5 + \frac{1}{6} \cdot 4$, portanto, $L = 5C + \frac{4}{6}C$.

As quatro ações anteriormente relatadas foram desenvolvidas durante um encontro (das 19h15min às 22h30min). Atingiu-se um nível de abstração e generalização considerável. Entendeu-se que este grau de abstração deve-se ao experimento objetual, mesmo que representado em um *slide*. As modelações, tanto objetual quanto gráfica e literal, refletiam a essência revelada no plano objetual, e foram aceitas pela turma sem objeções e que se envolveu durante a solução de forma autônoma. Em momento algum assumiu-se a postura de expositor de conteúdo, apenas se questionava. E estes questionamentos faziam emergir na turma exatamente aquilo que se explicaria em uma aula expositiva. Mas, diferentemente dos resultados obtidos nas aulas expositivas, nas quais os alunos assumem uma postura passiva, aqui os estudantes refletiram coletivamente e elaboraram suas sínteses. Sínteses estas já produzidas pela humanidade ao longo da história que subsidiou o exercício da função desta

equipe enquanto orientadores do processo de aprendizagem dos acadêmicos.

Considerações finais

Investigou-se o desenvolvimento do pensamento matemático, em nível teórico, por estudantes do curso de Pedagogia de uma universidade localizada no sul do estado de Santa Catarina, Brasil.

Realizou-se um experimento didático desenvolvimental, com um semestre de duração. Os conceitos foram abordados no contexto de seus sistemas conceituais, a partir da relação entre grandezas, no movimento de redução do concreto ao abstrato e ascensão do abstrato ao concreto, por meio das quatro ações de estudo propostas por Davýdov.

Na especificidade do presente artigo, focou-se em um isolado da pesquisa referente ao desenvolvimento do pensamento matemático, em nível teórico, mediado pelo conceito de fração a partir da grandeza comprimento.

Durante o experimento didático, os colaboradores da pesquisa definiram a essência do conceito de fração como a relação de multiplicidade e divisibilidade entre duas grandezas de mesma natureza: uma tomada como unidade de medida e a outra como a grandeza a ser medida. Na primeira ação de estudo, revelaram-se estes elementos.

Na segunda ação, a partir da necessidade de se saber quantas vezes a unidade de medida cabia na grandeza em medição, iniciou-se o processo de modelação. Primeiro no plano objetual (virtual) e depois, por meio de sucessivas abstrações, no plano gráfico e literal. Ao atingir a abstração máxima, concluiu-se o procedimento de redução do concreto ao abstrato.

Na terceira ação de estudo, iniciou-se o procedimento de redução do concreto ao abstrato a partir da necessidade de subdivisão da unidade de medida. A satisfação de tal necessidade ocorreu a partir do modelo revelado e abstraído nas ações anteriores, porém, transformado e concretizado durante a solução de diversas tarefas particulares na quarta ação de estudo.

Nesse movimento, emergiu o conceito de fração na interconexão das significações algébricas e aritméticas e no contexto de um sistema conceitual que envolveu grandeza comprimento, unidade de medida básica, unidade de medida intermediária, divisão, multiplicação, adição, expressão numérica, expressão algébrica, incógnita, variável, equação, entre outros.

Além disso, ressalta-se que a finalidade no isolado em análise foi revelar a gênese do

conceito de número fracionário, em nível teórico, a partir da grandeza comprimento na formação inicial de professores. Portanto, a grandeza comprimento não se constitui no objeto de ensino, mas em um meio para subsidiar as reflexões sobre a gênese e o desenvolvimento do conceito de número fracionário. No entanto, a partir das reflexões anteriores, pode-se dar continuidade e introduzir o ensino das unidades de medidas padronizadas de comprimento.

Entende-se que o modo de organização de ensino, que se apresentou no decorrer do presente artigo, supera aquele predominantemente desenvolvido no Brasil que toma como ponto de partida a contagem de pedaços de pizzas, pedaços de chocolate (FREITAS, 2016; SANTOS, 2017; ISIDORO, 2019). Ou seja, geralmente, toma-se a grandeza discreta, por meio da contagem de pedaços de alguma coisa em detrimento da essência do conceito de fração, a partir da relação de divisibilidade e multiplicidade e então os estudantes chegam ao ensino superior sem conhecer fração.

Finaliza-se o presente artigo com a certeza de que não se esgotou a problemática referente ao processo de ensino e aprendizagem do conceito de fração. Sugere-se que as futuras pesquisas referentes a este sistema conceitual incidam nas operações básicas a partir da essência do referido conceito, no contexto da indissociabilidade entre aritmética, álgebra e geometria no movimento de redução do concreto ao abstrato e ascensão do abstrato ao concreto por meio das quatro ações de estudo.

Referências

CARAÇA, B. de J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Gradiva, 1951.

DAVÍDOV, V. V. **Tipos de generalización en la enseñanza**. 3. ed. Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982.

DAVÍDOV, V. V. Problemas do ensino desenvolvimental: a experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia. Tradução de José Carlos Libâneo. **Educação Soviética**, n. 8, ago. 1988.

FREITAS, D. de. **O movimento do pensamento expresso nas tarefas particulares proposta por Davýdov e colaboradores para apropriação do sistema conceitual de fração**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2016.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht, The Netherlands: Reidel, 1975.

ISIDORO, L. C. N. **Modo de organização do ensino desenvolvimental de fração: o conhecimento revelado por acadêmicas de pedagogia**. 2019. Dissertação (Mestrado em

Educação) - Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2019.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

MOURA, M. O. de (Coord.). **Controle da variação de quantidades**: atividades de ensino. São Paulo: FEUSP, 1996.

MOURA, M. O. de *et al.* A atividade orientadora de ensino como unidade entre ensino e aprendizagem. *In*: MOURA, M. O. (Org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Campinas: Autores Associados, 2016. p. 93-125.

REPKIN, V. V; REPIKINA, N. V. Modelo teórico da aprendizagem desenvolvimental. *In*: PUENTES, R. V; LONGAREZI, A. M. **Ensino desenvolvimental**: sistema Elkonin-Davídov-Repkin. Uberlândia: EDUFU, 2019. p. 27-76.

ROSA, J. E. **Proposições de Davídov para o ensino de matemática no primeiro ano escolar**: inter-relações dos sistemas de significações numéricas. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

SANTA CATARINA. Secretaria de Estado da Educação. **Currículo base da educação infantil e do ensino fundamental do território catarinense**. Florianópolis: SED, 2019.

SANTOS, C. O. **O movimento conceitual de fração a partir dos fundamentos da lógica dialética para o modo de organização do ensino**. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2017.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. Tradução de Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

Recebido em: 04 de dezembro de 2020

Aprovado em: 16 de março de 2021