

DESIGN DE ATIVIDADES PARA INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE LIMITE NO MODELO DE SALA DE AULA INVERTIDA¹

DOI: <https://doi.org/10.33871/22385800.2020.9.19.285-307>

Marcio Vieira de Almeida²
Agnaldo da Conceição Esquinalha³
Celina Aparecida Almeida Pereira Abar⁴

Resumo: Estudos da área da Educação Matemática no Ensino Superior sinalizam a necessidade de uma postura autônoma e proativa por parte do estudante na graduação. Dentre várias possibilidades para o desenvolvimento dessa postura, destaca-se a utilização de metodologias ativas, com elementos do Ensino Híbrido, em especial a Sala de Aula Invertida. Neste artigo objetivamos apresentar uma metodologia para o desenvolvimento de atividades para a introdução do conceito de limite. Essa metodologia é apresentada em Talbert (2009), que indica uma lista com sete passos que auxiliam no *design* de uma aula com elementos da aprendizagem invertida. Além disso, propomos um conjunto de atividades, para introduzir o conceito de limite, de forma a possibilitar o desenvolvimento da definição formal a partir da exploração de diferentes representações (numéricas, simbólicas e gráficas). Entendemos ser fundamental para a área de pesquisa discutir questões relacionadas ao *design* de atividades matemáticas.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral. Limites. Ensino Híbrido. Sala de Aula Invertida.

TASK DESIGN FOR INTRODUCTION TO THE LIMIT CONCEPT IN THE FLIPPED CLASSROOM MODEL

Abstract: Research in the area of Mathematics Education in Higher Education indicates a necessity for an autonomous and proactive posture on the part of the undergraduate student. Among several possibilities for the development of this posture, we highlight the use of active methodologies, with elements of Blended Learning, especially the Flipped Classroom model. In this article, we aim to present a methodology for the development of activities for the introduction of the concept of limit. This method is presented by Talbert (2009), who indicates a list with seven steps that assist a teacher in the design of a class with elements of flipped learning. Besides, we propose a set of activities, to introduce the concept of limit, to enable the development of the formal definition from the exploration of different representations (numerical, symbolic, and graphic). We understand that it is fundamental for the research area to discuss issues related to mathematical task design.

Keywords: Differential and Integral Calculus. Limits. Blended Learning. Flipped Classroom

Introdução

O Cálculo Diferencial e Integral⁵ é uma área da Matemática que está presente em

¹ Este trabalho é desenvolvido no âmbito do projeto de pós-doutorado pesquisa Ensino de Pré-Cálculo e de Cálculo Diferencial e Integral na Modalidade *Blended Learning* desenvolvido sob supervisão do Prof. Dr. Agnaldo da Conceição Esquinalha no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

² Doutor em Educação Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro/UFRJ. E-mail: marcioalmeidas@gmail.com – ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7188-3806>

³ Doutor em Educação Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro/UFRJ. E-mail: agnaldo@im.ufrj.br – ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5543-6627>

⁴ Doutora em Lógica Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo/PUC-SP, E-mail: abarcaap@pucsp.br – ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6685-9956>

⁵ Doravante, utilizaremos o termo ‘Cálculo’.

cursos de Ciências Exatas, de algumas áreas das Ciências Sociais Aplicadas, como Administração e Economia, e de Engenharias. Para Silva *et al.* (2010), uma disciplina de Cálculo contempla necessidades desses cursos e eles indicam a necessidade e a importância que possui o Cálculo para a formação profissional de egressos.

Contudo, essa disciplina, por apresentar um grau de abstração, exige do estudante, conceitos matemáticos prévios e por isso tem sido considerada uma disciplina difícil ou que apresenta dificuldade de aprendizado por parte dos estudantes recém-chegados à universidade, o que muitas vezes implica em altos índices de retenção e evasão (BADINO; CABRAL, 2004).

Da forma como o Cálculo está estruturado, o conceito de limite de funções de uma variável real⁶ desempenha um papel central e é, possivelmente, aquele que acarreta mais dificuldade de compreensão para os estudantes. No estado da arte apresentado em Bressoud *et al.* (2016), com relação ao conceito de limite, é indicado que algumas das “concepções que os alunos extraem de suas ideias, intuições e conhecimentos ao tentarem dar sentido [ao conceito], podem bloquear a compreensão” (p. 6, tradução nossa, adaptado). Por exemplo, uma concepção de limite como uma barreira pode fazer com que o estudante conclua erroneamente que esse valor não pertence à imagem da função. Dessa forma é necessário tomar certos cuidados com a forma pela qual esse conceito é apresentado.

Outro ponto que destacamos está relacionado à postura que os estudantes da graduação precisam desenvolver. Gueudet *et al.* (2016) sinalizam a necessidade de uma postura autônoma e proativa. Miranda e Masson (2016) identificam a necessidade de mudança na postura dos estudantes: “Muitos alunos do ensino médio [...] não tem hábitos de estudo, o que compromete significativamente a aprendizagem no Ensino Superior” (p. 2). Dessa forma, seria necessário que em aulas da graduação, pudéssemos desenvolver uma postura autônoma e hábitos de estudo.

Além de mudanças na postura, Iglioni (2009) indica a existência de diferenças na maneira como a aprendizagem, no Ensino Superior, é concebida e pontua duas outras mudanças: na forma como os conteúdos curriculares são tratados e na atitude dos estudantes. Os conteúdos são considerados como “objetos de ensino”, ao invés de “objetos de aprendizagem”, os quais devem ser compartilhados entre professores e estudantes. Com isso, os estudantes do Ensino Superior passam a adquirir maior responsabilidade pelo sucesso (ou insucesso) de sua aprendizagem.

⁶ De agora em diante, indicaremos esse conceito pelo termo ‘limite’.

Entendemos que seja necessário desenvolver em estudantes de graduação uma postura proativa e de mudanças na forma como os conteúdos curriculares são tratados. Pesquisas internacionais (JUNGIC *et al.*, 20015; MACIEJEWSKI, 2015; MURPHY *et al.*, 2015; PETRILLO, 2015) têm indicado que a modalidade Ensino Híbrido⁷ pode ser uma metodologia de ensino que possibilite o desenvolvimento e a mudança pretendidos.

Schreiber *et al.* (2018) realizam levantamento com vistas a identificar e analisar publicações científicas, nacionais e internacionais, acerca da estratégia pedagógica da Sala de Aula Invertida⁸ no ensino de Matemática e evidenciam impactos positivos no desempenho, motivação e autonomia dos estudantes. As autoras indicaram a obtenção de “resultados satisfatórios na inversão da sala de aula, demonstrando que esta pode ser uma alternativa ao ensino tradicional, pois possibilita o desenvolvimento do protagonismo e da autonomia dos estudantes” (SCHREIBER *et al.*, 2018, p. 233).

Talbert (2019) indica que uma aula proposta com a SAI pode propiciar uma aprendizagem invertida⁹. Como uma das possibilidades para implementar uma proposta de ensino baseada na SAI utiliza-se Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC). Segundo Valente (2014), as tecnologias têm modificado aspectos como: a organização dos tempos e espaços da escola, relações entre o aprendiz e a informação e interações entre alunos, entre alunos e professor.

Contudo, como podemos organizar atividades de ensino utilizando a sala de aula invertida? Em Moreira *et al.* (2018) é indicada a necessidade de considerar aspectos metodológicos para o desenvolvimento de atividades de ensino nesse modelo.

Dessa forma, neste artigo objetivamos discutir uma metodologia para o desenvolvimento de atividades, no submodelo SAI, apresentada em Talbert (2019), assim como propor um conjunto de atividades desenvolvidas com base nessa metodologia para a apresentação da definição formal do conceito de limite de uma função de uma variável.

Sendo assim, este trabalho é organizado da seguinte maneira: inicialmente apresentamos considerações sobre o ensino de Cálculo e de limites com tecnologias; modelos de Ensino Híbrido, com destaque para SAI e de Aprendizagem Invertida; exibimos o modelo de *design* para a SAI, proposto em Talbert (2019); elaboramos um conjunto de atividades utilizando o modelo e, por fim, apresentamos considerações finais sobre o trabalho.

⁷ Tradução livre do termo original *Blended Learning* e que será utilizada neste manuscrito.

⁸ Doravante, utilizaremos a sigla SAI para o termo Sala de Aula Invertida.

⁹ Tradução livre do termo original *Flipped Learning*.

Tecnologias digitais no ensino de Cálculo e o ensino de limites

Nesta seção apresentamos considerações sobre o ensino do Cálculo com tecnologias digitais e sobre o ensino de limite, pois objetivamos desenvolver um conjunto de atividades para a apresentação da definição formal do conceito de limite, considerando o modelo proposto em Talbert (2019) para uma aula no modelo SAI. Tomamos como definição formal de limite, nesta proposta, a abordagem de Stewart (2006), segundo o qual:

Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenham o número a , exceto possivelmente no próprio a . Então dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L , e escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$ (p. 101).

Com relação ao ensino de limites com tecnologias digitais, inicialmente exibimos considerações de Tall que indicam que “o computador pode mostrar gráficos dinâmicos e oferecer um poder antes inimaginável de computação numérica e simbólica. No entanto, a tecnologia disponível tem um potencial muito maior para permitir aos estudantes (e matemáticos) dar sentido às ideias” (TALL, 2013 p. 43, tradução nossa).

Tall afirma que determinados ambientes computacionais podem ser utilizados para o desenvolvimento cognitivo dos sujeitos, pois por meio deles é possível

[...] executar quaisquer algoritmos de forma rápida e eficiente e o resultado final numa gama de diferentes representações. Por exemplo, os resultados podem ser representados *visualmente* e manipulados *fisicamente*. Utilizando um *mouse* é possível ao estudante construir relações corporificadas que fazem parte de uma estrutura conceitual mais rica e ampla (TALL, 2000, p. 10, tradução nossa, grifo do autor).

O seguinte aspecto deve ser considerado quando a tecnologia é utilizada no ensino, segundo Tall:

As experiências desenvolvem aspectos perspicazes que apoiam a teoria, mas também podem levar a uma variedade de outras imagens mentais que podem ser diferentes das ideais matemáticas atualmente convencionadas pelos especialistas (TALL, 2001, p. 230, tradução nossa).

Bressoud *et al.* (2016) indicam que com auxílio de tecnologias digitais

[...] pode-se desenvolver uma abordagem visual de ideias fundamentais como infinitesimais, processos de aproximação, mudança, variação, acumulação, etc. com tecnologias pode-se auxiliar estudantes a ter

percepções sobre a existência formal de conceitos do Cálculo (BRESSOUD *et al.*, 2016, p. 28, tradução nossa).

Dessa forma, é possível implementar atividades com tecnologias digitais que objetivem o desenvolvimento formal de um conceito matemático.

Com relação ao ensino e à aprendizagem de limites, Tall e Vinner (1981) enfatizam que uma dificuldade para estudantes é conceber o processo de limite como um número. Quando o conceito de limite é apresentado como um processo dinâmico de aproximação, Tall e Vinner (1981) e Robert (1982) indicam que a palavra “aproximar” pode criar uma concepção equivocada do conceito de limite implicando na monotonicidade da função bem como criar ou reforçar uma concepção que o valor do limite não pertence à imagem da função.

A interpretação dinâmica de limite, como o processo de aproximação, de acordo com Williams (1991) não é concebida de modo contínuo, mas sequencialmente, sendo essa “uma forma idealizada de calcular a função em uma sequência de pontos sucessivamente próximos de um dado valor” (p. 230).

Cottrill *et al.* (1996) indica que o conceito de limite encapsula¹⁰ dois processos: um no qual a variável independente aproxima-se de um valor e outro no qual o valor da variável dependente se aproxima de outro valor.

Para finalizar esta seção, apresentamos considerações sobre o ensino da definição formal do conceito de limite. Em estudos da área (COTTRILL *et al.*, 1996; SWINYARD; LARSEN, 2012; TALL; VINNER, 1981; TALL *et al.*, 2008) são apresentados indícios que estudantes, em cursos introdutórios de Cálculo, apresentam dificuldades na interpretação, comunicação ou aplicação da definição formal de limite seja por não entenderem o significado da simbologia algébrica envolvidos ou por não conseguirem operar com os operadores lógicos da definição formal de limite.

Tall *et al.* (2008) indicam que para o ensino, é necessário relacionar noções intuitiva de limite com a simbologia algébrica de sua definição formal. Um ponto de partida, indicado pelos pesquisadores, é construir intuições por meio da exploração de suas diferentes representações (numéricas, simbólicas e gráficas) que possibilitem o desenvolvimento formal. Fonseca (2019) exemplifica uma possibilidade desse tipo de construção da seguinte forma:

[...] explorar as aproximações $x \rightarrow x_0$ e $f(x) \rightarrow L$, em termos das vizinhanças

¹⁰ O termo “encapsula” está no âmbito da Teoria APOS de Dubinsky (2002) que indica o ato consciente de transformar processos (dinâmicos) em objetos (estáticos), por meio de alguma ação ou operação.

$V_\delta(x_0)$ e $V_\varepsilon(L)$ representadas através de intervalos e desigualdades, bem como o significado dessas simbologias e do seu papel na expressão da definição formal, promovendo um sentido mais completo dos conceitos envolvidos e facilitando o entendimento de simbologias algébricas (p. 39).

Quando a noção de vizinhança¹¹ é considerada seria possível formalizar noções intuitivas de aproximações $x \rightarrow x_0$ e $f(x) \rightarrow L$ por meio de intervalos e desigualdades que definem uma vizinhança no conjunto dos números reais. A consideração da vizinhança teria o objetivo de explicar a simbologia que é utilizada na definição formal de limite em termos das vizinhanças $V_\delta(x_0)$ e $V_\varepsilon(L)$ ¹², como indicado em Domingos (2003) e Swinyard e Larssen (2012). Outro ponto em que a noção de vizinhança pode auxiliar, é na compreensão do conceito de limite, por ser uma possibilidade de que não prevaleça apenas a ideia de monotocidade que por vezes pode ser desenvolvida quando apenas são consideradas aproximações por valores à esquerda ou à direita dos valores do domínio de uma função.

Esses entendimentos podem ser bastante úteis na elaboração de atividades para ensino de limites, em particular, explorando recursos digitais. Nas próximas seções discorreremos sobre a SAI e o modelo de Talbert (2019) que será utilizado.

Ensino Híbrido, Sala de Aula Invertida e a Aprendizagem Invertida

Nesta seção aprofundamos conceitos de Ensino Híbrido, destacando o submodelo SAI, e Aprendizagem Invertida que utilizaremos no conjunto de atividades desenvolvido.

O Ensino Híbrido é uma modalidade que tem, como uma de suas ideias principais, que a instrução, seja de informação e/ou de conteúdos, ocorra fora do período de sala de aula. E o período em sala de aula passa a ser utilizado para o desenvolvimento de aspectos relacionados ao conceito considerado e interações entre os estudantes, fomentada por meio de discussão entre os pares, atividades de resolução de problemas, dentre outras (CRONHJORT *et. al*, 2018).

Horn e Staker (2015) indicam que o modelo de Ensino Híbrido é um tipo de inovação sustentada em relação à sala de aula tradicional que configura-se por “uma tentativa de oferecer ‘o melhor de dois mundos’ — isto é, as vantagens da educação online combinadas com todos os benefícios da sala de aula [presencial]” (p. 3-4, adaptado). Nesse sentido, os

¹¹ Definição de vizinhança considerada: Dado um ponto x_0 pertencente ao conjunto dos números reais, definimos uma vizinhança desse ponto representada por $V(x_0)$ um intervalo aberto I tal que $x_0 \in I$.

¹² Definição de vizinhança- ε de L ($V_\varepsilon(L)$) como o intervalo aberto $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$.

autores indicam por vantagens da educação online: “o ensino online pode permitir que os estudantes aprendam a qualquer momento, em qualquer lugar, e qualquer caminho e em qualquer ritmo, em larga escala” (p. 10). E como benefícios da sala de aula presencial, os autores indicam o encontro com professor(es) e/ou supervisor(es) e momentos de interação com professor(es) ou supervisor(es) e entre os pares.

O conceito de Ensino Híbrido, segundo Horn e Staker (2015), se caracteriza por um programa de educação formal que combina momentos em que o aluno recebe as instruções e os conteúdos usando recursos online e outros em que o ensino se dá em sala de aula, podendo interagir com outros alunos e com o professor. Valente (2014) comenta sobre as duas partes descritas por Horn e Staker:

Na parte realizada online o aluno dispõe de meios para controlar quando, onde, como e com quem vai estudar. Esses autores [Staker e Horn] enfatizam o aspecto formal para diferenciar as situações de aprendizagem que acontecem informalmente. No caso do *blended learning* o conteúdo e as instruções devem ser elaborados especificamente para a disciplina ao invés de usar qualquer material que o aluno acessa na internet. Além disso, a parte presencial deve necessariamente contar com a supervisão do professor, valorizar as interações interpessoais e ser complementar às atividades online, proporcionando um processo de ensino e de aprendizagem mais eficiente, interessante e personalizado (VALENTE, 2014, p. 84, adaptado).

Lopes *et al.* (2003) destacam princípios norteadores no Ensino Híbrido, a saber: a criação de um ambiente de motivação para engajar os estudantes em atividades; a possibilidade de propor reflexão como forma de construção de conceitos; de estimular a cooperação entre os participantes; de desenvolver a autonomia na busca da informação e a capacidade de investigação. Por conta disso, o Ensino Híbrido está sendo visto atualmente como uma forma de se oferecer mais opções aos estudantes, já que trabalha em dois ambientes: presencial e online de maneira integrada.

Para a implantação de abordagem de ensino baseadas no Ensino Híbrido, destaca-se a SAI. Nela é proposta a possibilidade de o estudante utilizar seu próprio tempo, fora da sala de aula, para ler textos, estudar, ter contato com o assunto que será explorado conjuntamente com estudantes e professor em um encontro presencial. Neste caso, a ação do professor será de retomar, discutir e problematizar o conteúdo estudado pelo aluno anteriormente, desempenhando um papel condutor e crítico do percurso dos estudantes.

Uma possibilidade que atualmente tem sido desenvolvida para a SAI no ensino de Cálculo, como indicado por Pavanello e Lima (2017) e Moares e Abar (2017), é trabalhar os conteúdos indicados antes do encontro presencial, em um Ambiente Virtual de Aprendizagem

(AVA).

A SAI é, para a FLN¹³, uma maneira de implementar uma abordagem chamada de aprendizagem invertida. Talbert (2019) indica que o termo aprendizagem invertida pode ser utilizado “a toda filosofia de ensino e aprendizagem que abrange o *design* de uma disciplina (o que algumas vezes denominamos *design* de aprendizagem invertida) e as expectativas não só quanto a o que mas também como os alunos aprendem” (p. 8, grifo do autor).

Além disso, ele apresenta a seguinte definição para o termo aprendizagem invertida:

A aprendizagem invertida é uma abordagem pedagógica na qual o primeiro contato com conceitos novos se desloca do espaço de aprendizagem grupal para o individual, na forma de atividade estruturada, e o espaço grupal resultante é transformado em um ambiente de aprendizagem dinâmico e interativo, no qual o educador guia os alunos enquanto eles aplicam os conceitos e se engajam criativamente no assunto (TALBERT, 2019, p. 21).

O autor indica que o termo ‘espaço’ não é apenas o espaço físico da sala de aula ou outro qualquer, mas também “aos contextos emocional, intelectual e psicológico com os quais os alunos se deparam quando estão fazendo o trabalho” (TALBERT, 2019, p. 10). E assim, o contexto de espaço individual, é considerado um momento no qual os alunos estejam trabalhando, seja individualmente ou em grupos pequenos, e esse trabalho esteja focado em esforços individuais do aluno. O contexto de espaço de aprendizagem grupal

[...] é aquele no qual os alunos operam quando estão trabalhando com um grupo formal com parte da aula [...] o que eles encontram quando trabalham com toda a turma ou algum subgrupo intencional e regulado da turma, tal como pequenos grupos formados durante a aula pelo professor ou determinado grupo de discussão em uma disciplina online (TALBERT, 2019, p. 10).

Dessa forma, Talbert indica que para que o professor possa promover um ambiente de aprendizagem dinâmico e interativo nos dois espaços, o individual e o grupal, é necessário que o professor ofereça orientação para os alunos.

Outro ponto que destacamos é que a SAI não é a única forma de realizar uma aula, ou curso, com base na Aprendizagem Invertida. Ele cita o exemplo de Eric Mansur, da Harvard

¹³ Sigla da organização *Flipped Learning Network* (FLN). Segundo descrição do site da organização (<https://flippedlearning.org/who-we-are/>): “é uma comunidade online original sem fins lucrativos para educadores que utilizam ou se interessam em aprender mais sobre a sala de aula invertida e práticas de aprendizagem invertidas. Iniciada em 2012 por pioneiros amplamente reconhecidos, incluindo Jon Bergmann, Aaron Sams, April Gudenrath, Kristin Daniels, Troy Cockrum, Brian Bennett e outros, a FLN revisou sua missão em 2016 para se concentrar mais diretamente em ser um *hub* online onde educadores em todo o mundo pode compartilhar e acessar recursos, dicas, ferramentas e muito mais” (FLIPPED LEARNING NETWORK, 2014, tradução nossa).

University, e a *peer instruction*. Nesse sistema de instrução, o foco do tempo em aula está em expor e corrigir as concepções errôneas dos alunos sobre ideias importantes de um determinado assunto. Talbert indica que a *peer instruction* se enquadra na definição de Aprendizagem Invertida dada, pois:

O foco do espaço grupal está na aplicação dinâmica do conteúdo básico, especificamente uma interação dinâmica entre os colegas para isolar e corrigir concepções equivocadas comuns sobre conceitos fundamentais. Para que se tenha tempo para fazer isso em sala de aula, os alunos nas aulas com *peer instruction* devem aprender o conteúdo básico de forma independente antes da aula (TALBERT, 2019, p. 32).

Finalizamos esta seção em que exibimos os conceitos de Ensino Híbrido, SAI e da Aprendizagem Invertida, que nortearam o desenvolvimento da atividade proposta neste artigo. Na próxima seção, é apresentado um modelo de *design* (TALBERT, 2019) para o conjunto de atividades que possibilite o desenvolvimento de uma aula no modelo SAI.

Um modelo de *design* de uma aula no modelo SAI

Nesta seção apresentamos o modelo que foi utilizado para o desenvolvimento de uma aula no modelo SAI e que objetiva a introdução do conceito de limite.

Inicialmente, exibimos um estudo de caso sobre o *design* de uma disciplina de Cálculo como feito em Talbert (2019), que relata como foi desenvolvida na Grand Valley State University (GVSU), localizada em Michigan, nos Estados Unidos. A disciplina é comumente ministrada no 1º semestre para uma gama de cursos como Engenharia, em especial, uma porta de entrada para disciplinas mais avançadas em matemática e ciências.

Talbert indica o seguinte motivo pelo qual resolveu utilizar uma metodologia ativa em suas aulas:

A maior preocupação era o efeito que meu ambiente de aprendizagem estava tendo nos futuros professores. Se os alunos acharem que o cálculo tem a ver com repetição mecânica da exposição do professor e se cálculo for a disciplina que informa as experiências futuras de todos os professores de matemática, então o que necessariamente irá acontecer é que eles se tornarão professores que transmitirão essa compreensão falha da matemática para a próxima geração (TALBERT, 2019, p. 58).

Dessa forma, Talbert resolveu utilizar um modelo de aprendizagem invertida para o desenvolvimento da disciplina de Cálculo com um *design* de aula invertida da seguinte forma:

A intenção era de que os alunos obtivessem instrução direta por meio de vídeo pré-gravado¹⁴, a ser assistido antes do horário da aula, e, então, o tempo em sala de aula seria usado inteiramente respondendo a perguntas e resolvendo tarefas de resolução de problemas mais difíceis (TALBERT, 2019, p. 58).

Nesse caso, os espaços de aprendizagem individual e o grupal foram organizados do seguinte modo: antes do encontro presencial, no espaço individual, os alunos realizavam uma atividade denominada por Prática Guiada, na qual se deparavam com o material pela primeira vez, de uma forma estruturada, e que contém as seguintes atividades:

- uma descrição do que os alunos iriam aprender na aula seguinte;
- uma lista de objetivos de aprendizagem para a aula, ou tarefas de aprendizagem específicas;
- uma seção de recursos para aprendizagem. Podem ser, por exemplo, uma parte do livro-texto para ler e/ou uma seleção de vídeos para assistir;
- uma coleção de exercícios que proporcionavam aos alunos formas de praticar tarefas descritas na lista dos objetivos de aprendizagem básicos;
- um conjunto de instruções sobre como submeter o trabalho, tipicamente alimentando as informações básicas e as respostas aos exercícios em um Formulário no Google.

Em uma aula de 50 minutos, Talbert descreve como o espaço grupal era desenvolvido nessa disciplina de Cálculo ministrada por ele: nos cinco primeiros minutos eram formados grupos de três e quatro integrantes para discutir as respostas dadas às atividades da Prática Guiada; cinco minutos nos quais era feito um balanço da atividade desenvolvidas, focando em padrões apresentados pelos estudantes e concepções errôneas. O restante da aula era reservado para o desenvolvimento de uma forma de aprendizagem ativa que se adequasse ao conteúdo em questão, em duplas ou em grupos, como as seguintes:

- atividades de *peer instruction* usando *clickers*¹⁵ e testes conceituais (MANZUR, 1997) para material conceitual;
- trabalho em grupo sobre aplicações do conceito básico a cálculos mais avançados e aplicações na vida real;
- grupos resolvendo a derivação ou a prova de uma ideia importante

¹⁴ A lista de vídeos utilizados está disponível no seguinte link: https://www.youtube.com/watch?v=6HPE7iwr88k&list=PL9bLjQJDwfGuXQHUS5Jkmum_CFILOCZX-

¹⁵ O termo “clikers” é se refere a um tipo de sistema de resposta do estudante (termo original *student response system*). Esse tipo de sistema possibilita ao estudante responder perguntas, formuladas pelo professor, usando a internet em seus dispositivos móveis ou no computador, sendo que as respostas são computadas instantaneamente ao professor. Exemplo desse tipo de sistema é o Kahoot! (<https://kahoot.com/>)

(TALBERT, 2019, p. 61).

Esse é um exemplo de aprendizagem invertida pois no espaço individual o primeiro contato com novos conceitos de Cálculo ocorre por meio das atividades desenvolvidas no âmbito da Prática Guiada, que configuravam-se como uma “atividade estruturada que forneceu orientações quando se deparavam com o material novo pela primeira vez” (TALBERT, 2019, p. 62). O espaço grupal é orientado para aprendizagem ativa “por meio de trabalho iterativo e desafiador em tarefas de mais alto nível que normalmente teriam sido relegadas para um momento fora de aula” (TALBERT, 2019, p. 62).

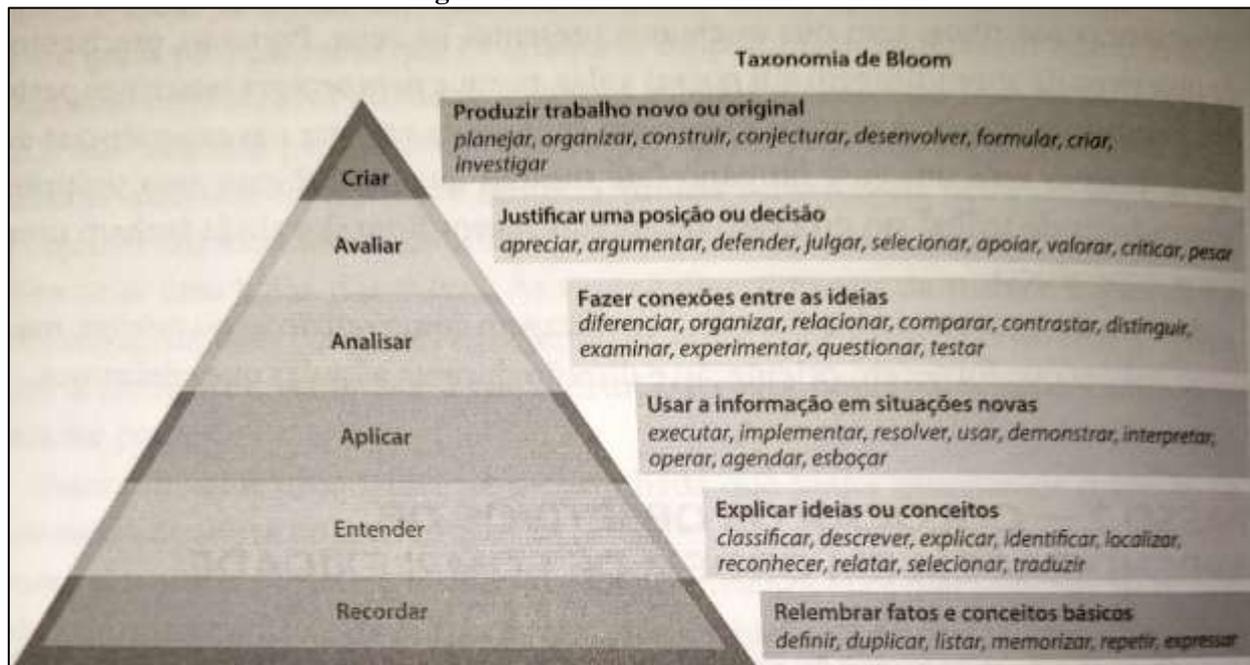
Para auxiliar no planejamento de uma aula para ser desenvolvida em um ambiente de aprendizagem invertida, Talbert (2019) expõe uma estrutura composta por sete passos:

1. Elaborar uma lista breve, mas abrangente, dos objetivos de aprendizagem para a aula;
2. Recombinar os objetivos de aprendizagem para que apareçam em ordem de complexidade dos processos cognitivos;
3. Criar um esboço do planejamento da atividade no espaço grupal que você pretende que os alunos façam;
4. Retornar à lista dos objetivos de aprendizagem e dividi-los em objetivos básicos e avançados;
5. Terminar o planejamento da atividade para o espaço em grupo;
6. Planejar e construir a atividade para o espaço individual;
7. Planejar e construir atividades para o espaço pós-grupo que você pretende que os alunos façam.

Da lista indicada por Talbert, destacamos a noção de complexidade dos processos cognitivos, apresentada no item 2, é referenciada segundo a Taxonomia de Bloom¹⁶. Essa pode ser representada por uma pirâmide, dividida em níveis nos quais os mais inferiores correspondem às atividades simples e a complexidade vai aumentando à medida que são acessados os níveis mais altos da pirâmide. Na Figura 1 apresentamos cada um dos níveis, e os verbos que podem ser associados aos níveis da taxonomia de Bloom:

¹⁶ A Taxonomia de Bloom é uma ferramenta criada por Benjamin Bloom e outros estudiosos das áreas da educação e psicologia com a finalidade de classificar objetivos educacionais. Foi considerada aquele que classifica o processo cognitivo, entendido como o meio pelo qual o conhecimento é adquirido ou construído e usado para resolver problemas diários e eventuais.

Figura 1: Pirâmide da taxonomia de Bloom



Fonte: TALBERT, 2019, p. 120.

Com base nos sete passos propostos em Talbert (2019), apresentamos uma proposta para o desenvolvimento de uma aula com elementos da SAI e da aprendizagem invertida para a introdução do conceito formal de limite.

Proposta de uma aula no modelo sala de aula invertida

O que é apresentado nesta seção é um conjunto de atividades em que objetiva-se a introdução do conceito de limite, com vistas a possibilitar o desenvolvimento formal desse conceito.

De acordo com o modelo de *design* indicado por Talbert (2019), anunciamos os objetivos desse conjunto de atividades já ordenados de acordo com os níveis de complexidade e ordenados segundo elementos da Taxonomia de Bloom.

- Enunciar a ideia intuitiva de limite pelo problema da velocidade instantânea;
- Enunciar a definição formal de limite de uma função;
- Estimar o valor do limite de uma função de maneira numérica;
- Estimar o valor do limite de uma função graficamente;
- Conjecturar sobre a não existência do limite de uma função em um dado ponto.

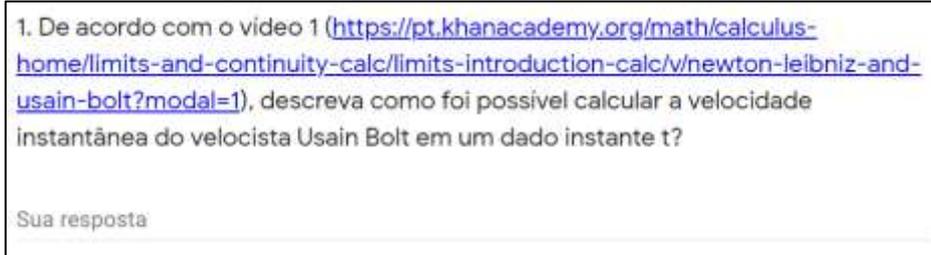
- Interpretar graficamente os valores ε e δ da definição de limite de uma função em um dado ponto;

Para o desenvolvimento do espaço individual de aprendizagem, elaboramos duas práticas guiadas, com questões implementadas em dois formulários utilizando a ferramenta Formulários Google. Utilizamos essa ferramenta por permitir uma futura coleta das respostas dadas de maneira rápida e organizada.

A seguir, apresentamos impressões de tela das questões desenvolvidas no primeiro formulário¹⁷.

Na primeira questão objetiva-se verificar qual seria o entendimento do respondente sobre determinado vídeo assistido.

Figura 2: Primeira questão da prática guiada desenvolvida no primeiro formulário



1. De acordo com o vídeo 1 (<https://pt.khanacademy.org/math/calculus-home/limits-and-continuity-calc/limits-introduction-calc/v/newton-leibniz-and-usain-bolt?modal=1>), descreva como foi possível calcular a velocidade instantânea do velocista Usain Bolt em um dado instante t ?

Sua resposta

Fonte: produção dos autores.

O vídeo, da plataforma Khan Academy¹⁸, apresenta uma introdução ao conceito de limite pelo cálculo da velocidade instantânea do velocista Usain Bolt durante uma prova de 100 metros rasos. Por esse motivo, a questão proposta solicita que os alunos descrevam, com suas palavras, qual foi o método apresentado para calcular a velocidade instantânea do corredor em um dado instante. Esse tipo de atividade visa avaliar se o vídeo selecionado foi assistido e o que foi compreendido dele. Além disso, o vídeo mostra que um processo de limite pode resultar em um número. Sendo que essa é uma das dificuldades apontadas em Tall e Vinner (1981): conceber o processo de limite como um número. Vejamos a segunda questão.

¹⁷ Disponível em: <https://forms.gle/bxDbncedpaiKg2bv5>

¹⁸ A *Khan Academy* (<https://pt.khanacademy.org/>) é uma organização cuja missão é proporcionar uma educação gratuita e de alta qualidade para todos, em qualquer lugar, oferece uma coleção grátis de vídeos de Matemática (do Ensino Básico ao Superior) e outras áreas do conhecimentos como Física, Química, Biologia, Ciência da Computação, entre outras.

Figura 3: Segunda questão da prática guiada desenvolvida no primeiro formulário

2. Observe a seguinte construção do GeoGebra
(<https://www.geogebra.org/m/u9jhjghg>). Calcule três velocidades médias em valores próximos de $t = 2$, indicando no campo abaixo os seguintes dados: o instante escolhido t - a velocidade média calculada. Exemplo: $t = 1.89$, $v = 19.7272...$

Sua resposta

Fonte: produção dos autores.

Na segunda questão objetiva-se que seja utilizado o método descrito para o cálculo da velocidade média em outra situação: o cálculo da velocidade instantânea de uma bola lançada verticalmente no instante $t = 2$ segundos. Nessa atividade queremos que os alunos procurem aplicar o método apresentado na questão anterior para calcular a velocidade instantânea de um móvel. Nessa atividade é utilizado um *applet* do GeoGebra, de modo que com esse *applet* é possível efetuar a seguinte operação indicada por Tall quando diz que “os resultados podem ser representados visualmente e manipulados fisicamente. Utilizando um mouse é possível ao estudante construir relações corporificadas que fazem parte de uma estrutura conceitual mais rica e ampla” (TALL, 2000, p. 10, tradução nossa).

Nas próximas três questões (terceira, quarta e quinta) são abordados métodos numéricos e gráficos para a estimativa do valor de um limite de uma função num ponto dado.

Figura 4: Terceira questão da prática guiada desenvolvida no primeiro formulário

3. Veja o vídeo 2 (<https://pt.khanacademy.org/math/calculus-home/limits-and-continuity-calc/limits-from-tables-calc/v/limit-by-analyzing-numerical-data?modal=1>) e responda: como é possível estimar o limite de uma função em um dado ponto?

Sua resposta

Fonte: Produção dos autores.

Na terceira questão apresentamos um vídeo que trata de como é possível estimar o valor do limite de uma função por meio de uma tabela e da observação do comportamento gráfico da função, e é solicitado ao estudante que escreva o que entendeu sobre esse método.

Na Figura 5 apresentamos as questões quatro, cinco e seis:

Figura 5: As três últimas questões da prática guiada desenvolvida no primeiro formulário

4. Observe as tabelas a seguir que mostram o comportamento de uma função próximo de $x = 1$. Assinale a alternativa que contém o valor do limite da função f quando x se aproxima de 1.

$f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$, e o comportamento dessa função em valores próximos ao 1.

x	$f(x)$
0	1
0.5	0,66666667
0.9	0,52631579
0.95	0,51282051
0.99	0,50251256
0.995	0,50125313
0.999	0,50025013

x	$f(x)$
2	0,3333333333
1.5	0,4
1.1	0,476190476
1.05	0,487804878
1.01	0,497512438
1.005	0,498753117
1.0001	0,499975001

1
 0
 0,5
 Não é possível estimar o valor de limite.

5. Acesse a seguinte construção do GeoGebra - <https://www.geogebra.org/m/hf8wncv> - e responda a seguinte questão: estime qual seria o valor do limite da função f quando x tende a 2?

4
 3
 2
 1
 Não é possível estimar o valor do limite.

6. Procure descrever uma situação na qual o limite de função em um dado ponto não existe.

Sua resposta

Fonte: produção dos autores.

Na quarta e na quinta questões solicita-se que se estime o limite de uma função, utilizando a abordagem gráfica e a numérica apresentadas no vídeo da questão 3. O exemplo apresentado, na questão 5, foi feito de forma que o estudante possa perceber que o valor limite pode ser diferente do valor da imagem da função e que o limite não é uma barreira, pois o valor do limite é menor que o valor da imagem da função no ponto $x = 2$.

Na última questão, deixamos que o aluno reflita sobre quais seriam as condições para as quais o limite de uma função não exista. Tall indica a necessidade de considerar contraexemplos de um dado conceito, pois se “todos os exemplos considerados possuem determinada propriedade, então, na ausência de contraexemplos, a mente assume que a propriedade conhecida seja implícita em outros contextos” (TALL, 1986, p. 84, tradução nossa).

Descrevemos, o esboço de uma atividade que poderia ser desenvolvida no espaço de aprendizagem grupal. Estimamos 50 minutos o desenvolvimento dessa atividade. No Quadro 1 é apresentado o esboço da atividade do espaço grupal:

Quadro 1: Organização das atividades do espaço grupal de aprendizagem

Tempo previsto	Descrição da atividade
Primeiros 15 minutos:	<p>Discussão sobre o que foi visto em vídeos que indicamos na atividade do espaço individual de aprendizagem. Essa discussão foi pautada nas seguintes questões:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Como foi calculada velocidade instantânea do corredor? • Para dado um gráfico de espaço em função do tempo, calcular a velocidade

	<p>instantânea em $t = 2$?</p> <ul style="list-style-type: none"> • Como estimar o valor de limite de uma função, a partir de informações de uma tabela? • Como poderíamos indicar quando o limite de função em um dado ponto não existe?
Próximos 25 minutos:	<p>Discussão sobre os seguintes termos destacados na definição intuitiva de limite (STEWART, 2006): “Se pudermos tomar os valores de $f(x)$ <u>arbitrariamente próximos de L</u> (tão próximo quanto quisermos), tornando x <u>suficientemente próximos de x_0</u> (por ambos os lados de x_0), mas não igual a x_0”.</p> <p>Resolução em sala das seguintes questões: Faça uma estimativa dos seguintes valores:</p> <p>a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$</p> <p>b) $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$</p>
10 minutos finais:	<p>Discussão final sobre as duas atividades propostas em aula.</p> <p>Reforçando que o método de aproximação sucessivas pode conduzir a um erro dependendo dos valores escolhidos (como no item b) que dependendo da forma como nos aproximamos do 0, o valor do limite não é o mesmo.</p>

Fonte: produção dos autores.

Para abordar o objetivo “Interpretar graficamente os valores ε e δ da definição de limite de uma função em um dado ponto” foi produzida uma segunda prática guiada. Nesta nos propomos a desenvolver atividades levando-se em conta o que é afirmado em Tall *et al.* (2008): a necessidade de relacionar noções intuitivas de limite com a simbologia algébrica de sua definição formal.

Nas questões 1, 2, 3 e 5 do segundo formulário¹⁹ dessa outra prática guiada foram selecionados vídeos da *Khan Academy*, em que procuramos mostrar a relação existente entre os elementos da noção intuitiva de limite com sua definição formal. Nas figuras 6 e 7 são apresentadas as questões 4, 6 e 7 nas quais os alunos teriam que aplicar conceitos que emergiram nos vídeos indicados.

¹⁹ Disponível em: <https://forms.gle/gRY7vbxsdvxu1VhCA>



Figura 6: A questão 4 da prática guiada desenvolvida no segundo formulário

4. Considere a aplicação do Geogebra (<https://www.geogebra.org/m/tfu2bqkq>), digite no campo a função $f(x) = x - 1$.

Quão próximo de $x_0 = 1$ devemos manter x para termos certeza de que $f(x) = x - 1$ fique menor que uma distância menor que 0,2 unidades de $y_0 = 2$. Assinale a alternativa que contém esse valor.

- 0,5
- 0,4
- 0,2
- 0,35
- Não entendi.

Fonte: produção dos autores.

Figura 7: As questões 6 e 7 da prática guiada desenvolvida no segundo formulário

6. (STEWART, 2013, p. 107) Utilize o gráfico da função $f(x) = 1/x$ para encontrar um número δ que satisfaça a seguinte condição:

$$\left| \frac{1}{x} - 0.5 \right| < 0.2 \quad \text{tal que} \quad |x - 2| < \delta$$

Sua resposta

Caso você não tenha conseguido resolver essa questão, procure descrever qual foi a sua dificuldade.

Sua resposta

7. (STEWART, 2013, p. 107)

Utilizando o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$ para encontrar um número δ positivo tal que

$$|\sqrt{x} - 2| < 0.4 \quad \text{sendo que} \quad |x - 4| < \delta$$

Sua resposta

Caso você não tenha conseguido resolver essa questão, procure descrever qual foi a sua dificuldade.

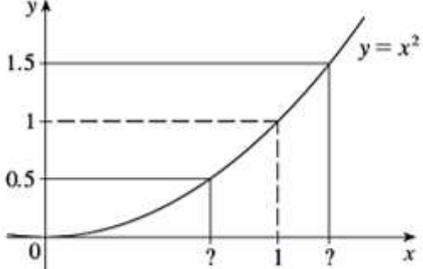
Sua resposta

Fonte: produção dos autores.

Na sequência é descrita uma atividade que poderia ser desenvolvida no espaço de aprendizagem grupal, com duração estimada em 50 minutos. No Quadro 2 é apresentado o esboço da atividade do espaço grupal:



Quadro 2: Organização das atividades do espaço grupal de aprendizagem

Tempo previsto	Descrição da atividade
Primeiros 20 minutos:	<p>Discussão sobre o que foi visto em vídeos que indicamos na atividade do espaço individual de aprendizagem. Essa discussão foi pautada nas seguintes questões:</p> <ul style="list-style-type: none">• Qual foi a comparação feita nos vídeos para justificar como é possível definir formalmente $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$?• Como foi definido formalmente o conceito de limite?• Como podemos utilizar a definição de limite para dado um valor de ε encontrar o valor de δ? <p>Enunciar a definição formal de limite.</p>
Próximos 20 minutos:	<p>Discussão entre os alunos das seguintes questões:</p> <p>Questão 1:</p> <p>Seja $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{se } x \neq 3 \\ 6, & \text{se } x = 3 \end{cases}$</p> <p>Quão próximos de $x_0 = 3$ deve estar x para que $f(x)$ fique a uma distância menor que 0,1 de $y_0 = 5$.</p> <p>Questão 2:</p> <p>Considere a mesma função da questão anterior, se considerarmos que o valor ao invés de 0,1 fosse um valor arbitrário ε, quão deveria ser o valor δ (dado em função de ε)?</p>
10 minutos finais:	<p>Discussão final sobre as duas questões propostas em aula.</p> <p>Proposição de duas atividades:</p> <p>Questão 1:</p> <p>(STEWART, 2006, p. 107) Use o gráfico dado de $f(x) = x^2$ para encontrar um número δ tal que:</p> <p>Se $x^2 - 1 < \frac{1}{2}$ então $x - 1 < \delta$</p>  <p>Questão 2: Utilize a definição formal de limite para demonstrar que $\lim_{x \rightarrow 3}(4x - 5) = 7$</p>

Fonte: produção dos autores.

Nesta atividade objetivamos proporcionar por meio dos vídeos selecionados a possibilidade de transição entre os elementos intuitivos do conceito de limite e a definição formal. Entendemos que os conteúdos dos vídeos selecionados auxiliam nesse processo, por exemplo, quando apresentam fragilidades com o termo “aproximar”. No espaço de aprendizagem grupal, procuraríamos sanar eventuais dúvidas na interpretação, comunicação ou aplicação da definição formal de limite seja por não entenderem o significado da simbologia algébrica envolvidos ou por não conseguirem operar com os operadores lógicos da definição



formal de limite, com indicado em pesquisas da área (COTTRILL *et al.*, 1996; SWINYARD; LARSEN, 2012; TALL; VINNER, 1981; TALL *et al.*, 2008).

Nesta seção apresentamos um conjunto de atividades propostos em conformidade com o modelo de design proposto em Tabert (2009), para o desenvolvimento do conceito formal de limite. Em um próximo trabalho, pretendemos narrar sua implementação em uma turma de Cálculo.

Considerações finais

Neste artigo foi apresentada uma metodologia, inspirada em Talbert (2019), para a construção de atividades que possibilitem o desenvolvimento do conceito de limite, apoiado em elementos da SAI e da Aprendizagem Invertida.

Esse material atende uma necessidade indicada por pesquisadores (GUEUDET *et al.*, 2016; MIRANDA; MASSON, 2016) sobre a importância de desenvolvimento de uma postura ativa por parte de estudantes do Ensino Superior. Também por outros estudos (JUNGIC *et al.*, 20015; MACIEJEWSKI, 2015; MURPHY *et al.*, 2015; PETRILLO, 2015; SCHREIBER *et al.*, 2018) que indicam que o modelo SAI pode ser uma maneira de organizar aulas de forma ao desenvolvimento dessa postura.

Corroboramos com pesquisas (COTTRILL *et al.*, 1996; SWINYARD; LARSEN, 2012; TALL; VINNER, 1981; TALL *et al.*, 2008) que indicam a necessidade de apresentar a definição de limite relacionando noções intuitiva de limite com a simbologia algébrica de sua definição formal e além de explorar diferentes representações (numéricas, simbólicas e gráficas) ao estudar esse conceito.

Contudo, como podemos organizar atividades de ensino utilizando a sala de aula invertida? Para responder a essa questão, trouxemos o modelo de *design* proposto em Talbert (2019). Esse modelo possui uma estrutura composta por sete passos que possibilitam a organização de dois espaços de aprendizagem que emergem no âmbito da aprendizagem invertida: o individual e o grupal.

Utilizando esse modelo desenvolvemos um conjunto de atividades para a introdução do conceito de limite. Mais ainda, apresentamos como poderia ser conduzida uma atividade para a introdução do conceito de limite em duas aulas de aproximadamente 50 minutos.

Entendemos que a discussão teórica sobre a produção das atividades utilizando elementos da SAI se faz necessária. Além disso, anunciamos que está prevista a aplicação

desse material com um grupo de alunos de uma Instituição Pública de Ensino Superior. E, a partir daí, poderemos responder quais foram os avanços dos estudantes que utilizaram as atividades apresentadas neste manuscrito.

Vislumbramos possibilidades de futuras pesquisas, pois entendemos que o modelo proposto em Talbert (2019) pode ser utilizado em outros tópicos de Matemática de Nível Superior. Dessa feita, poderiam ser selecionados outros constructos teóricos distintos daqueles utilizados neste trabalho.

Por fim pretendemos, com o conjunto de atividades apresentado, ampliar o campo das discussões sobre o desenvolvimento de outras atividades, referenciadas em resultados de pesquisa e constructos teóricos da Educação Matemática. Entendemos que a elaboração de material para o ensino é um campo de pesquisa fértil e necessário para que se possa implementar resultados de pesquisas da Educação Matemática nas salas de aula.

Referências

BALDINO, R. R; CABRAL, T. C. B. O ensino de matemática em um curso de engenharia de sistemas digitais. In: CURY, H.N (org.). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos, propostas**. Porto Alegre: EDPUCRS. p. 139-186, 2004.

BRESSOUD, D.; GHEDAMSI, I.; MARTINEZ-LUACES, V.; TÖRNER, G. **Teaching and Learning of Calculus**. ICME-13 Topical Surveys. 2016. Springer International Publishing:

COTTRILL, J.; DUBINSKY, E., NICHOLS, D.; SCHWINGENDORF, K.; THOMAS, K.; VIDAKOVIC, D. Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 15, n. 2, p. 167–192. 1996.

CRONHJORT, M.; FILIPSSON, L.; WEURLANDER, M. Improved engagement and learning in flipped-classroom calculus. **Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA**, 37, p. 113–121, 2018.

DUBINSKY, E. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: TALL, David. (Org.) **Advanced Mathematical Thinking**, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002, p. 95-123.

DOMINGOS, A. M. D. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados: a matemática no início do superior**. Tese (Doutorado em Ciências da Matemática) – PPGCM da Universidade Nova de Lisboa. Lisboa, 2003

FLIPPED LEARNING NETWORK. **Who we are**. 2014. Disponível em: <https://flippedlearning.org/who-we-are/>. Acesso em: 03 de ago. 2019.

FONSECA, V. G.. **Aprendizagem com compreensão dos conceitos de limite e**

continuidade: uma experiência de ensino com recurso ao GeoGebra na formação inicial de professores de matemática, no brasil.. 2019. 386 f. Tese (Doutorado) - Curso de Educação na Especialidade da Didática da Matemática, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2019.

GUEUDET, G., BOSCH, M., DISESSA, A., KWON, O. N. VERSCHAFFEL, L. (Orgs.) **Transitions in Mathematics Education** (ICME-13 Topical Surveys). New York, NY: Springer. 2016.

HORN, M.; STAKER, H. **Inovação na sala de aula:** como a inovação disruptiva muda a forma de aprender. Porto Alegre: Artmed, 2009.

IGLIORI, S. B. C. Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. *In:* FROTA, M. C. R; NASSER, L. (Orgs.) **Educação Matemática no Ensino Superior:** pesquisas e debates. Recife: SBEM, p. 11 – 26, 2009.

JUNGIĆ, V.; KAUR, H.; MULHOLLAND, J.; XIN, C. On flipping the classroom in large first year calculus courses. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 46, n. 4, p. 508–520, 2015.

LOPES, L. M., KLIMICK, C. CASANOVA, M. A. Relato de uma experiência de Sistema Híbrido no Ensino Fundamental: Projeto Aulativa. *In:* **Revista Brasileira de Aprendizagem Aberta e a Distância**, São Paulo, 2003.

MACIEJEWSKI, W. Flipping the calculus classroom: an evaluative study. **Teaching Mathematics and its Applications:** An International Journal of the IMA, v. 35, n. 4, p. 187–201, 2018.

MIRANDA, L. F.; MASSON, T. J. Projeto de Apoio para Melhoria do desempenho Acadêmico – PAMDA. Anais: **XLIV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia**. Rio Grande do Norte: UFRN, 2016.

MOREIRA, M. M.; JOYE, C. R.; ARAÚJO, A. C. U.; BORGES NETO, H.. A Sequência Fedathi na Produção do Material Didático de Matemática: Estudo de Caso do IFCE. **Conexões - Ciência e Tecnologia**, v. 12, n. 1, p. 8-17, mar. 2018. Disponível em: <http://conexoes.ifce.edu.br/index.php/conexoes/article/view/1321>. Acesso em: 23 jun. 2020.

MORAES, U. C.; ABAR, C. A. A. P. Uma proposta para a sala de aula invertida no estudo de pré-cálculo dos cursos de engenharia. *In:* SAFETY, HEALTH AND ENVIRONMENT WORLD CONGRESS, 17., 2017, Vila Real. **Proceedings** of XVII Safety, Health and Environment World Congress. Vila Real: Science And Education Research Council, Copec, 2017. p. 72 - 75. Disponível em: <http://www.copec.eu/shewc2017/proc/works/15.pdf>. Acesso em: 23 jun. 2020.

MURPHY, J.; CHANG, J.; SUARAY. K. Student performance and attitudes in a collaborative and flipped linear algebra course. **Teaching Mathematics and its Applications:** An International Journal of the IMA, v. 47, n. 5, p. 653–673, 2016.

PAVANELO, E.; LIMA, R. Sala de Aula Invertida: a análise de uma experiência na disciplina de Cálculo I. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 58, p. 739–759, 2017.

PETRILLO, J.. On flipping first-semester calculus: a case study. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 47, n. 4, p. 573–582, 2016.

ROBERT, A. **L'acquisition de la notion de convergence des suites numérique dans l'enseignement supérieur**. 566 f. 1982. Thèse (Didactique des Mathématiques) - Université Paris VII, Paris, 1982.

SCHREIBER, P. K.; PEREIRA, E. C., MACHADO, C. C., PORCIÚNCULA, M.. Sala de aula invertida no ensino de Matemática: mapeamento de pesquisas científicas na área de Ensino. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 20, n. 2, out. 2018. ISSN 1983-3156. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/35473>>. Acesso em 23 jun. 2020.

SILVA M. A.; AQUINO L. R. C.; CAVALCANTE F. L.; MACEDO A. A. M.; MACEDO L. N. **Dificuldades de aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial e integral**: estudo de caso com alunos do curso de licenciatura em Química, 2010. Disponível em: <<http://connepi.ifal.edu.br/ocs/index.php/connepi/CONNEPI2010/paper/viewFile/1617/882>>. Acesso em 23 jun. 2020.

SWINYARD, C.; LARSEN, S.. Coming to understand the formal definition of limit: Insights gained from engaging students in reinvention. **Journal For Research In Mathematics Education**, vol. 43, n. 4, 2012, p. 465–493.

STEWART, J. **Cálculo**, Volume 1. 7a ed. São Paulo: Cengage Learning, 2006.

TALBERT, R. **Guia para Utilização da Aprendizagem Invertida no Ensino Superior**. Porto Alegre: Penso Editora, 2019.

TALL, D. **Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics**. 1986. 505 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – University of Warwick, Inglaterra, 1986.

_____. Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). *In: ASIAN TECHNOLOGY CONFERENCE IN MATHEMATICS*, 5, 2000, Chiang Mai. Proceedings... Blackwood: ATCM Inc, 2000. Disponível em: <<http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2000h-plenary-atcm2000.pdf>>. Acesso em 23 jun. 2020.

_____. Cognitive development in advanced mathematics using technology. **Mathematics Education Research Journal**, v. 12, n. 3, p. 210 - 230, 2001. Disponível em: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2001b-merj-amt.pdf>. Acesso em 23 jun. 2020.

_____. A sensible approach to the calculus. PLUVINAGE, F.; CUEVAS, A. (Eds.), **Handbook on calculus and its teaching**. México: Pearson. 2013.

TALL, D.; SMITH, D.; PIEZ, C. Technology and Calculus. *In: HEIDM. K.; BLUME, G. M. (Ed). Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics*. Charlotte, NC: Information Age Publishing, 2008. v. 1. p. 207-258.

TALL, D; VINNER, S. Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, Nova York, NY, n. 12, p. 151-169, mai. 1981.

VALENTE, J. A. Blended learning e as mudanças no Ensino Superior: a proposta da sala de aula invertida. **Educar em Revista**, Curitiba, Edição Especial, n. 4, p. 79-97, 2014.

WILLIAMS, S. R.; Models of Limit held by College Calculus Students. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 22, n. 3, p. 219-236, 1991.

Recebido em: 27 de junho de 2020
Aprovado em: 02 de agosto de 2020