



## **CONSTRUINDO A EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA E DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA POR MEIO DO SOFTWARE GEOGEBRA 3D: UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO ENSINO MÉDIO**

Charles Bruno da Silva Melo<sup>1</sup>  
José Carlos Pinto Leivas<sup>2</sup>

**Resumo:** Este artigo apresenta uma investigação realizada pelo primeiro autor, sob a orientação do segundo, tendo o *software* GeoGebra 3D como ferramenta para construir a equação reduzida da circunferência e da superfície esférica. Foi aplicada, em uma escola pública estadual, no município de Candelária/RS, com três alunos bolsistas de um projeto de pesquisa (Programa de Iniciação em Ciências, Matemática, Engenharias, Tecnologias Criativas e Letras-PICMEL), no segundo semestre de 2014. Teve por objetivo explorar a visualização, no processo de construção das equações da circunferência e da superfície esférica, utilizando uma tecnologia computacional. Conclui-se que o objetivo foi alcançado, pois os alunos conseguiram deduzir, tanto a equação da circunferência no plano, quanto a da superfície esférica no espaço, por meio de recursos visuais. Além disso, o uso do GeoGebra, com suas janelas de álgebra e de visualização, favoreceu a relação entre as duas formas de representação. Portanto, ele foi decisivo para a aprendizagem do conteúdo matemático envolvido.

**Palavras-chaves:** equação da circunferência. Equação da superfície esférica. GeoGebra 3D. Tecnologias.

## **BUILDING THE EQUATION OF CIRCUMFERENCE AND SPHERICAL SURFACE BY GEOGEBRA 3D: AN EXPERIENCE WITH HIGH SCHOOL STUDENTS**

**Abstract:** This article presents an investigation conducted by the first author, under the guidance of the second. He had the software GeoGebra 3D as tool for constructing the reduced equation of the circumference and the spherical surface. It was applied in a public school in the city of Candelária / RS, with three students from a research project (Programa de Iniciação em Ciências, Matemática, Engenharias, Tecnologias Criativas e Letras-PICMEL), in the second half of 2014. The aim of the investigation was to explore the visualization, in the process of constructing the equations of the circumference and the spherical surface, using a computational technology. It is concluded that the objective was reached, because the students were able to deduce both the equation of the circumference in the plane and of the spherical surface in space, through visual resources. Furthermore, the use of the windows of algebra and of visualization, permitted relationship between the two forms of representation. Therefore, it was decisive for learning the mathematical content involved.

**Keywords:** equation of the circumference. Equation of the sphere's surface; GeoGebra 3D. technologies.

---

<sup>1</sup> Mestre em Ensino de Matemática. Escola Estadual de Ensino Médio Gastão Bragatti Lepage, SEDUC-RS. E-mail: xarlesdemelo@yahoo.com.br.

<sup>2</sup> Doutor em Educação. Centro Universitário Franciscano de Santa Maria – RS, UNIFRA. E-mail: leivasjc@unifra.br.

## **Introdução**

Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), a Geometria Analítica deve possibilitar a articulação entre a Geometria e a Álgebra, devendo o professor trabalhar a compreensão de figuras geométricas por meio de equações e vice-versa, evitando memorizações de fórmulas e abandonando, assim, a simples apresentação de equações.

Para que ocorra essa transição, é necessário explorar a visualização, definida por Leivas (2009) como “um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos” (p.22).

Da mesma forma, para Fischbein (1987, p.104), “uma imagem visual não somente organiza os dados em estruturas significativas, mas é também um fator importante para orientar o desenvolvimento de uma solução analítica; representações visuais são essenciais dispositivos antecipatórios”.

De acordo com Eisenberg e Dreyfus (1989), “muitos conceitos e processos, na Matemática da escola, podem ser obtidos por meio de interpretações visuais, isto é, modelos visuais podem ser construídos e refletem uma grande parte da compreensão da estrutura dessa área” (p. 1) sendo, por esse motivo, referenciais importantes para a prática desenvolvida num conteúdo do Ensino Médio, o qual merece estudos inovadores, como esse de Geometria Analítica.

Em termos de inovação que se possa introduzir, na escola, em nível médio, existem as mídias computacionais, as quais, atualmente, têm o poder de incentivar os estudantes na busca de soluções de problemas. Essas, segundo Borba e Villarreal (2006), têm o poder de organizar o pensamento. Para eles, a “visualização tem sido a principal mudança em interfaces de computador desde que os monitores foram introduzidos como uma parte essencial deles” (p. 13).

Partindo dessa ideia, é essencial uma reflexão sobre como ensinar esse conteúdo. Por isso, na investigação aqui relatada, adotou-se o uso do *software* GeoGebra 3D como uma

ferramenta pedagógica para a construção da equação reduzida da circunferência e a da superfície esférica, pois ela propicia a exploração de modo dinâmico, bem como apresenta o conteúdo matemático de uma forma atraente aos estudantes, auxiliando, assim, na visualização.

Ao descrever diversos tipos de *softwares* de Geometria Dinâmica, Gravina et al. (2012) citam o GeoGebra como um deles, por apresentar, em sua tela, possibilidades de trabalhar com a geometria clássica, na qual se utilizam propriedades das figuras para sua construção. Para os autores, o “[...] processo de construção é feito mediante escolhas de primitivas que são disponibilizadas nos diferentes menus [...]” (p.24) e, nesse sentido, entende-se que a versão 3D é propícia para os propósitos da investigação que explora, até certo ponto, por analogia, um objeto geométrico plano e um espacial.

Este trabalho trata de uma aplicação realizada durante o desenvolvimento de uma disciplina cursada pelo primeiro autor e ministrada pelo segundo, a qual teve por objetivo aplicar e investigar possibilidades de desenvolver conhecimentos de Geometria Analítica não usuais no Ensino Médio. Consideram-se resultados da realização do projeto em que o primeiro autor foi o executor, com alunos bolsistas do projeto Programa de Iniciação em Ciências, Matemática, Engenharias, Tecnologias Criativas e Letras-PICMEL, na Escola Estadual de Ensino Médio Gastão Bragatti Lepage, no município de Candelária/RS. Esse projeto concorreu a um edital público divulgado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do estado do Rio Grande do Sul FAPERGS, financiado pela CAPES, como incentivo à iniciação científica. Um pesquisador ligado a uma instituição superior envolvida com pesquisa submetia projeto que estimulasse a iniciação à pesquisa entre jovens estudantes de escolas públicas deste estado. O pesquisador selecionava dois professores em exercício como executores do projeto, os quais recebiam bolsa para tal e deveriam selecionar, cada um em uma escola distinta, três estudantes que também recebiam uma bolsa de iniciação científica.

Considerando-se que os alunos envolvidos atingiram o objetivo do projeto de iniciação em investigações matemáticas e, para dar continuidade ao desenvolvimento dos mesmos, esses estudantes foram convidados a participar do trabalho aqui relatado, tendo aceitado.

### **Orientações Teóricas**

A Geometria Analítica se destaca como um estudo da Geometria que permite o desenvolvimento de formas mais elaboradas de pensamento, sendo definida por Boulos e Camargo (1987, p.13 *apud* RICHIT, 2005, p.41) como:

[...] o estudo da Geometria pelo método cartesiano (René Descartes, 1596-1650), que, em última análise, consiste em associar equações aos entes geométricos e, através do estudo dessas equações (com o auxílio da Álgebra, portanto), tirar conclusões a respeito daqueles entes geométricos.

Esse estudo consiste na relação entre problemas geométricos, que podem ser resolvidos por métodos algébricos ou equações algébricas, as quais podem ser verificadas geometricamente. Interliga a Geometria com a Álgebra.

Corroborando a afirmação de Eves (2004), a essência dessa Geometria consiste em estabelecer equivalência entre pontos do plano e coordenadas reais, em um sistema de eixos, viabilizando correspondência entre equação e curvas no plano e suas respectivas propriedades, tanto algébricas quanto geométricas, o que pode ser estendido ao espaço. De acordo com Courant e Robbins (2000),

[...] o sucesso completo na construção de uma Geometria Projetiva puramente sintética só foi alcançado por volta do final do século XIX, com um ônus bastante elevado em termos de complicação. Quanto a esse aspecto, os métodos da Geometria Analítica obtiveram um sucesso maior (*Ibidem*, p.234).

Naquele tempo, esse método teve grande sucesso e foi decisivo para obter êxito no desenvolvimento da Matemática, segundo os autores, mostrando um crescimento histórico e gradual no que se entendia por Geometria. A partir dele, por exemplo, o ponto poderia assumir dimensões além das euclidianas, atrelado ao comprimento, largura e espessura de um objeto físico, como na quarta e quinta dimensões, entre outras.

Para De Maio e Chiummo (2008), as “representações geométricas dos espaços  $R^n$  com  $n \geq 4$  não são possíveis com os meios de que dispomos; nesses casos, é usual associarmos as  $n$ -uplas de  $R^n$  aos pontos do espaço euclidiano  $E_0^n$ , generalizando as suas propriedades” (p. 19). Segundo esses autores, o uso de sistemas de coordenadas facilita a representação, sendo essa a maneira com que, em geral, se faz o tratamento da Geometria Analítica, especialmente no

Ensino Médio. Certamente, essa forma de abordagem permite vislumbrar uma Geometria além do mundo perceptível, sendo, pois, tão importante seu tratamento no mundo real. Nesse sentido, as representações obtidas por meio dos *softwares* de Geometria Dinâmica vão proporcionar a internalização desse ramo da Geometria.

A presença desse conteúdo, no currículo da Educação Básica, possibilita que o aluno construa uma visão ordenada das diferentes linguagens e campos da Matemática, estabelecendo, assim, conexões entre eles, bem como proporciona que ele entenda que, “mais importante do que memorizar diferentes equações para um mesmo ente geométrico, é necessário investir para garantir a compreensão do que a Geometria Analítica propõe” (BRASIL, 2002, p. 124). Nesse nível de escolaridade, o usual é abordar a Geometria Plana no que diz respeito ao ente geométrico reta.

Uma análise realizada por Lima (2001) em livros didáticos do Ensino Médio sobre esse conteúdo indica que, além de ignorar o uso de calculadoras e computadores, os livros servem como guias para os professores e determinam a qualidade de ensino das aulas. De modo geral, o autor vê uma série de falhas: fragmentação do conteúdo, excesso de problemas de caráter manipulativo e de fórmulas, além da falta de demonstrações de resultados importantes.

Quanto ao uso de tecnologias, segundo Sancho e Hernández (2006), uma das dificuldades, que se encontra, a fim de transformar o contexto do ensino, com a introdução dessas, parece estar no fato de que a escola fica centrada na figura do professor. Com o uso de um *software* de Geometria Dinâmica, o papel do aluno na construção de seu conhecimento é fundamental. Além disso, afirmam os autores: “[...] tampouco parecem prosperar as situações educativas em que se consideram as novas representações e o modo de construção do conhecimento...” (p. 19).

Esse quadro resume uma falta de conexão entre as representações, desqualificando o processo de ensino-aprendizagem e resumindo-o à memorização de fórmulas. Dessa forma, grande parte dos estudantes possui um conhecimento limitado de Matemática, sem ter a noção de que as soluções algébricas se refletem no plano coordenado.

Talvez uma causa razoável para esse quadro seja a dificuldade com os métodos tradicionais, como giz e quadro, régua e compasso, que não contemplam, de modo rápido e

eficaz, a representação geométrica.

Para que se possa proporcionar um ambiente que torne natural essa ligação entre a Álgebra e a Geometria, a articulação com a tecnologia passa a ser uma grande aliada, pois, com o uso de um *software* de geometria dinâmica, é possível explorar essas representações de maneira conjunta.

Conforme Cruz (2005), a geometria dinâmica é aquela que permite sua exploração por meio do movimento de figuras, na tela de um computador, cujas características estabelecem condições para que o usuário (aluno) manuseie seus componentes e realize conjecturas, atendendo aos requisitos necessários para que se observem regularidades.

Para colocar em prática a construção da circunferência e da superfície esférica, foi escolhido o GeoGebra 3D, que é um programa livre de geometria dinâmica, adequado para a análise gráfica, pois nele podem-se explorar conceitos geométricos e algébricos, bem como possibilitar a representação em terceira dimensão. Outros fatores importantes na escolha desse *software* foram: a facilidade de sua interface, pois os comandos são apresentados em linguagem simples e de fácil entendimento e por se tratar de um programa de distribuição livre.

De acordo com Vieira (2010, p.59), “o GeoGebra permite ao usuário manipular os objetos, de forma conveniente, gerando discussões a respeito do que está sendo estudado durante o desenvolvimento das atividades de geometria”.

### **Desenvolvimento das atividades**

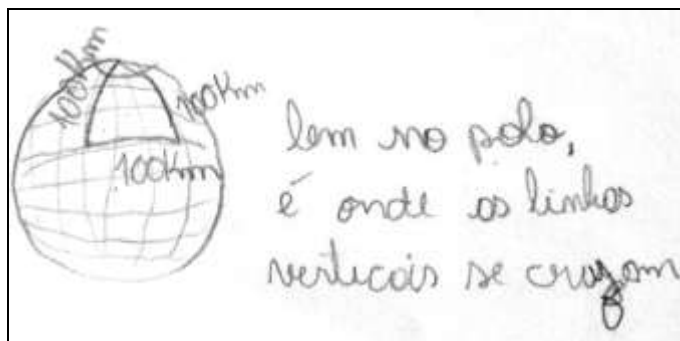
O trabalho constituiu-se de duas atividades que envolveram ferramentas de Geometria Plana e de Geometria Espacial, ambas na mais recente versão do GeoGebra que proporciona tal versatilidade. Elas foram desenvolvidas com três alunos bolsistas do PICMEL/FAPERGS/CAPES, na Escola Estadual de Ensino Médio Gastão Bragatti Lepage, no município de Candelária/RS, sendo dois deles do 2º ano e uma do 1º ano do Ensino Médio, os quais serão aqui identificados por A1, A2 e A3. O tempo de execução foi de 8h/aula de 50 minutos cada, no turno inverso, ou seja, ocorreu no outro turno de funcionamento das aulas regulares na escola, procedimento usual no estado do RS



Os alunos trabalharam de forma colaborativa, no laboratório de informática da escola, registrando todo o processo na realização das atividades, por meio eletrônico, tanto na escrita na própria janela de visualização, quanto em *word*, além de anotações no caderno. As construções e anotações foram repassados ao professor executor para análise e discussão com os três participantes.

A primeira atividade, cujo objetivo era compreender a diferença entre plano e espaço, consistiu na resolução de uma situação-problema, nesse caso, o enigma “Qual a cor do urso?” Nele, estava descrito o trajeto de um urso, relacionando-o aos pontos cardeais sul, norte e oeste, bem como seu deslocamento. Inicialmente, perguntou-se qual era a cor do urso. Todos responderam, corretamente, que era branco, justificando que o urso tinha seu *habitat* no Polo Norte. Posteriormente, eles deveriam ilustrar o trajeto do urso, em uma folha de ofício, explicando o que tinham feito. Na Figura 1, consta o registro do aluno A1, o qual ilustrou a trajetória do urso, na folha (no plano), utilizando como recurso a representação de uma superfície esférica (no espaço), já que o deslocamento foi sobre o Globo Terrestre.

**Figura 1:** registro do aluno A1, no plano, de uma situação sobre uma superfície esférica.



Fonte: os autores.

Na sequência, os alunos tiveram que registrar o deslocamento do urso, em uma bola de isopor, conforme ilustrado na Figura 2. A partir das ilustrações realizadas, eles foram questionados: o urso voltaria para casa, de acordo com o trajeto da folha ou da bola de isopor? Constataram que essa era uma situação que envolvia o espaço, portanto, na superfície esférica, não no plano.

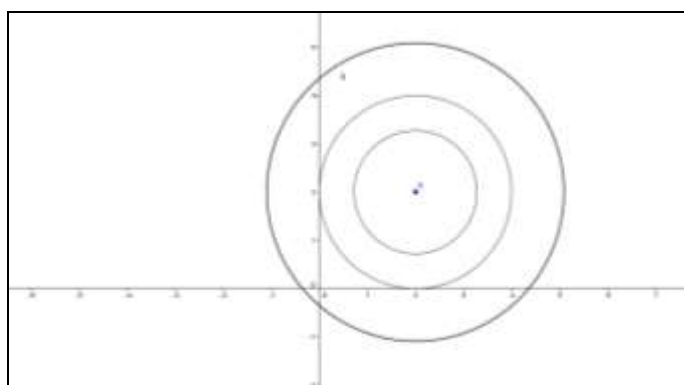
**Figura 2:** representação, na bola de isopor, do deslocamento do urso, feita pelos três alunos.



Fonte: os autores.

Após os esclarecimentos feitos pelo professor sobre uma diferença entre plano e espaço, bem como suas dimensões, os alunos receberam a segunda tarefa para executar no GeoGebra. Inicialmente, foi pedido que desabilitassem a *janela de álgebra*, uma vez que eles já conheciam o software. Posteriormente, deveriam criar um ponto qualquer sobre o plano cartesiano e nomeá-lo como ponto A o qual seria o centro da circunferência. Na sequência, deveriam criar uma circunferência com um raio qualquer e analisar o que aconteceria com ela, quando o raio fosse aumentado ou reduzido. Verificaram que seu tamanho também aumentava ou diminuía a partir do raio.

**Figura 3:** análise da redução ou aumento do raio no GeoGebra, feita pelo aluno A2.

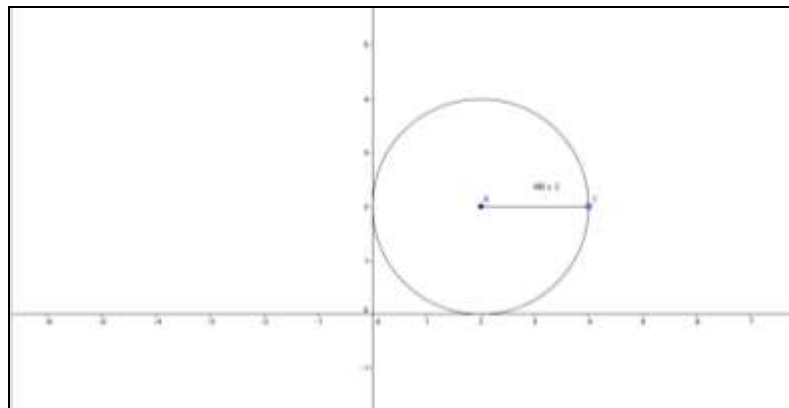


Fonte: os autores.

Nessa atividade, os alunos construíram um ponto qualquer na circunferência (ponto B na Figura 4). Em seguida, um segmento AB, ligando o centro da circunferência a esse ponto. Determinaram, então, o raio da circunferência, de acordo com a Figura 4.



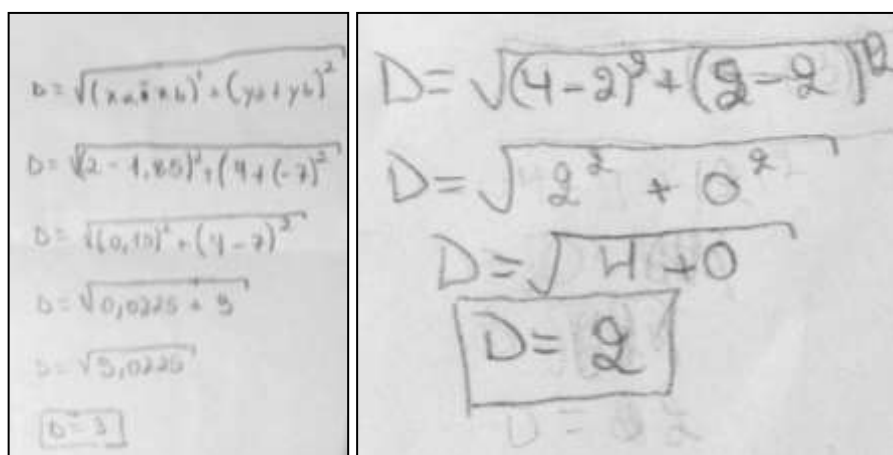
**Figura 4:** representação geométrica do raio feita, pelo aluno A3.



Fonte: os autores.

Como os alunos não cursavam o 3º ano do Ensino Médio, nível de ensino ao qual pertence o conteúdo de Geometria Analítica, não tinham contato com esse conteúdo e, dessa forma, o professor deduziu, em conjunto com os estudantes, a fórmula da distância euclidiana entre dois pontos no plano cartesiano, utilizando o *software*. Já com a expressão algébrica elaborada, a partir da dedução geométrica, os alunos calcularam a distância entre o centro da circunferência e o ponto B sobre ela. Constataram que essa distância era equivalente à medida do raio.

**Figura 5:** cálculo da distância entre os dois pontos, feita pelo aluno A2.



$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$D = \sqrt{(2 - 10)^2 + (4 - (-2))^2}$$

$$D = \sqrt{(-8)^2 + (4 + 2)^2}$$

$$D = \sqrt{64 + 36}$$

$$D = \sqrt{100}$$

$$D = 10$$

$$D = \sqrt{(4 - 2)^2 + (2 - 2)^2}$$

$$D = \sqrt{2^2 + 0^2}$$

$$D = \sqrt{4 + 0}$$

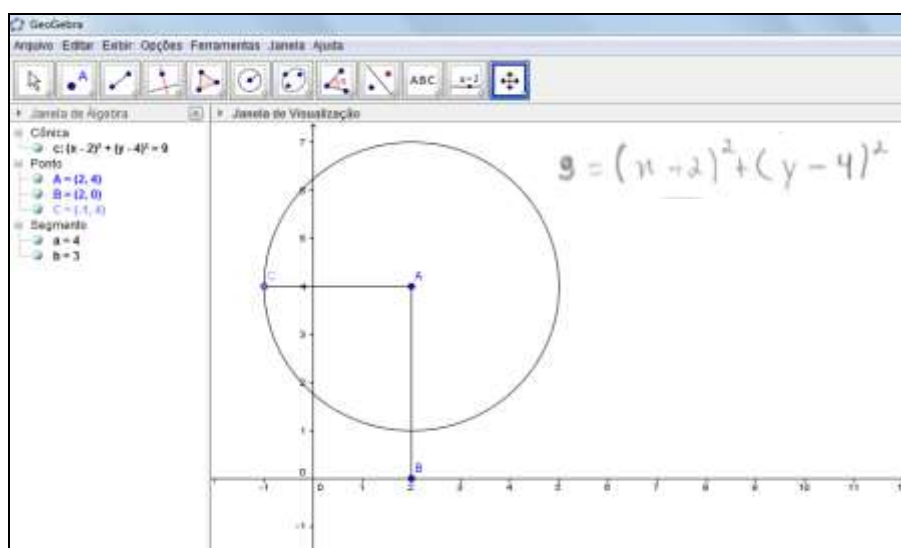
$$D = 2$$

Fonte: os autores.

Os estudantes foram desafiados a criarem uma equação que descrevesse a circunferência que construíram. Logo notaram que a distância entre os dois pontos era igual à

medida do raio e, como o ponto B pertencia à circunferência, mesmo esse variando, o centro se manteria o mesmo. Desse modo, concluíram que a equação da circunferência poderia ser descrita da seguinte forma:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ .

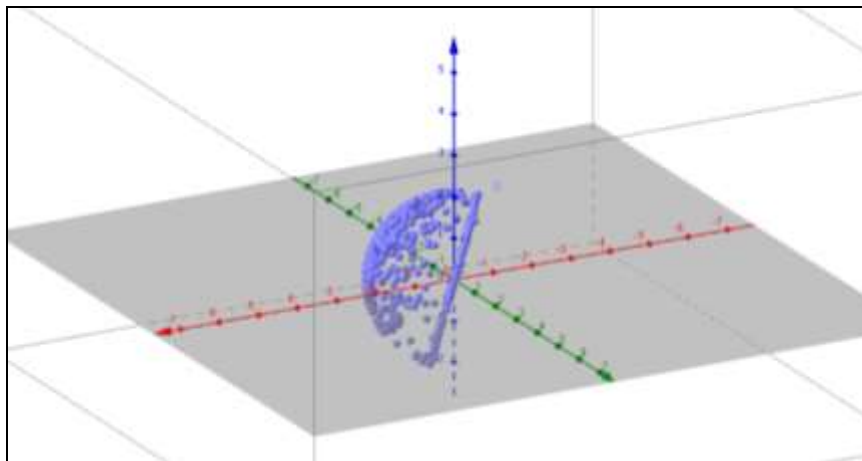
**Figura 6:** equação reduzida e sua representação geométrica, construída pelo aluno A2.



Fonte: os autores.

Na segunda etapa, os alunos exploraram o ambiente GeoGebra 3D para análise da superfície esférica. Inicialmente, construíram um vetor com módulo 2, cuja origem era coincidente com a origem do sistema de coordenadas. Habilitaram o rastro e, ao movimentarem a extremidade do vetor, verificaram que formava um objeto gráfico e que, unindo os pontos, formava uma superfície esférica.

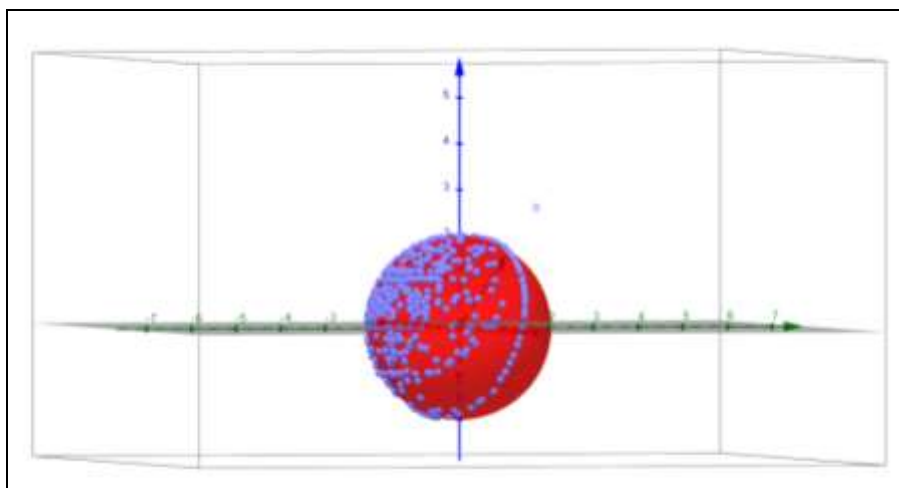
**Figura 7:** movimentação do vetor para a construção da superfície esférica, construída por A3.



Fonte: os autores.

Ao realizarem essa tarefa, os alunos perceberam que se tratava de uma superfície esférica. Posteriormente, construíram uma esfera com o mesmo raio utilizado para o vetor no caso 2. Verificaram que os pontos assim construídos coincidiam com os do objeto gráfico apontado por eles anteriormente. Nesse momento, foi explicada a diferença entre superfície esférica e esfera, uma vez que o *software* utiliza ambas as expressões como sinônimas.

**Figura 8:** construção da superfície esférica a partir do vetor, feita por A3.



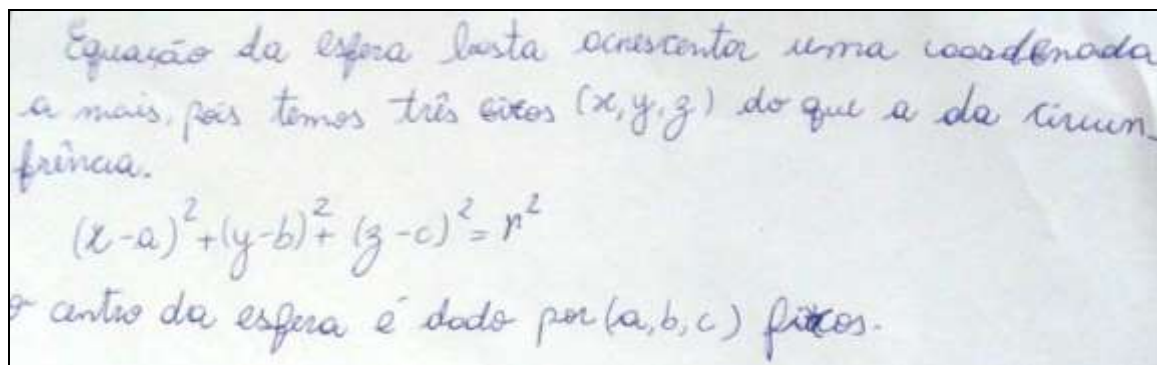
Fonte: os autores.

Com as situações apresentadas, os alunos foram indagados sobre qual a distância de um ponto qualquer da superfície da esfera ao ponto origem do sistema de coordenadas. Eles

deduziram que a distância tinha o mesmo valor do módulo do vetor, no caso 2, de forma similar ao que ocorrera, no plano, com a equação da circunferência. Constataram que se tratava de um sistema com três coordenadas para a equação da superfície esférica e que bastaria acrescentar uma coordenada, na equação construída anteriormente, para ter a equação reduzida da superfície esférica. Portanto, algebricamente, obtiveram:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

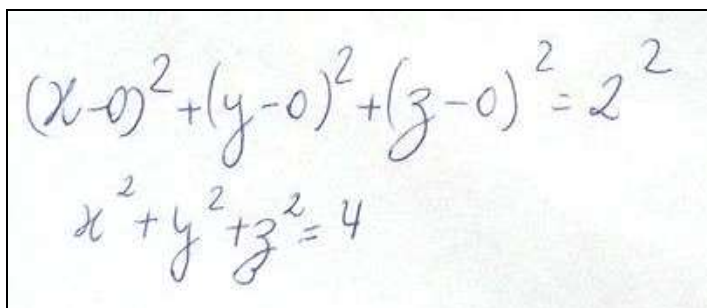
**Figura 9:** dedução a partir das atividades anteriores, registrada pelo aluno A1.



Fonte: os autores.

Para finalizar as atividades, os estudantes construíram a equação reduzida da superfície esférica que visualizaram no GeoGebra, efetuando a substituição de  $a=b=c=0$  na última equação e, em seguida, observaram que a equação era a mesma que se encontrava especificada na janela de álgebra do *software*.

**Figura 10:** equação reduzida da superfície esférica, construída pelo aluno A2.



$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 2^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

Fonte: os autores.

### **Considerações finais**

Após o desenvolvimento da investigação, foi possível observar que o uso da tecnologia é um aliado do professor e um facilitador do processo de ensino/aprendizado dos estudantes. A partir do recurso computacional GeoGebra 3D, verificou-se que os alunos ligaram Álgebra à Geometria, de modo a construir as equações reduzidas da circunferência e da superfície esférica. Isso também pôde ser comprovado ao finalizar o projeto, que teve a duração de um ano, possibilitando ao professor executor do mesmo uma nova visão sobre ensino a partir das tecnologias.

A exploração, de modo dinâmico, e a visualização proporcionada pelo GeoGebra foram satisfatórias, pois os alunos conseguiram construir conjecturas e comunicar conceitos matemáticos, relacionando os problemas inicialmente formulados de forma geométrica, para, em seguida, obter a respectiva forma algébrica. Assim, chegaram à construção desses novos conceitos. Em relação a esse processo, os alunos não apresentaram dificuldades, uma vez que já estavam trabalhando com Modelagem Matemática e acostumados à observação e tratamento matemático, porém a linguagem matemática formal ainda precisa ser mais trabalhada, da mesma forma que as abordagens sugeridas pelo professor.

Entende-se que o objetivo do experimento foi alcançado, já que possibilitou aos alunos aprenderem em ação, ou seja, foram sujeitos ativos no processo de construção do próprio conhecimento, além de ser uma proposta diferente daquela que se vinha utilizando, em anos anteriores, na prática profissional do professor executor no Ensino Médio.

### **Referências**

BORBA, M.C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking**: information and communication Technologies modeling, visualization and experimentation. USA: Springer, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2006.

\_\_\_\_\_. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília, 2002.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é matemática?** Rio de Janeiro: Editora Moderna Ltda, 2000.

CRUZ, D. G. **A utilização do ambiente dinâmico e interativo na construção de conhecimento distribuído.** Curitiba, 2005. Dissertação (Mestrado em Educação – linha de pesquisa educação matemática). Setor de Educação. Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2005. 169p.

DE MAIO, W.; CHIUMMO, A. (coord). **Geometrias. Geometrias Analíticas e Vetorial: Euclidianas e Não-Euclidianas.** Rio de Janeiro: LTC, 2007.

EISENBERG, T.; DREYFUS, T. Spatial Visualization in the Mathematics Curriculum. In: **Visualization and Mathematics Education.** EISENBERG, T.; DREYFUS, T. (editores), Focus on learning problems in mathematics. Winter 1989, v. 11, n. 1. Center for Teaching/Learning of Mathematics. 1989.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Campinas: Unicamp, 2004.

FISCHBEIN, E. **Intuition in science and mathematics: an educational approach.** Dordrecht: Reidel, 1987.

GRAVINA, M. A.; BÚRIGO, E.Z.; BASSO, M.V.de A.; GARCIA, V.C.V. (org.). **Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para formação do professor de Matemática.** Porto Alegre: Evangraf, 2012.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática.** 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2009, 294 p.

LIMA, E. L. **Análise de Textos.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

RICHIT, A. **Projetos em Geometria Analítica usando software de geometria dinâmica: repensando a formação inicial docente em Matemática.** 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2005, 169 f

SANCHO, J. M., HERNÁNDEZ, F. **Tecnologias para transformar a educação.** Porto Alegre: Artmed, 2006.





VIEIRA, C. R. **Reinventando a Geometria no Ensino Médio:** uma abordagem envolvendo materiais concretos, softwares de geometria dinâmica e a Teoria de Van Hiele. 2010. Dissertação (Mestrado Profissional), Universidade Federal de Ouro Preto. Disponível em: [http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/diss\\_Carmem\\_Rosilene\\_Vieira.pdf](http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/diss_Carmem_Rosilene_Vieira.pdf)> Acesso em: 15 nov. 2014.

**Recebido em: 05/03/2016**  
**Aprovado em: 21/02/2017**