

Algumas evidências de ‘semelhanças de família’ nas caracterizações de modelo matemático

Michele Regiane Dias Veronez¹

Henrique Cristiano Thomas de Souza²

Resumo: A Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática consiste em um processo de busca por uma solução para uma situação problema e tal solução pode ser descrita ou obtida a partir de modelos matemáticos. Sendo assim, modelos matemáticos podem desempenhar um papel importante no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática e merecem ser entendidos no contexto de suas caracterizações, inclusive, em associação com a definição de Modelagem Matemática que o ancora. Neste trabalho, trazemos à tona algumas caracterizações de modelo matemático, suscitadas por alguns pesquisadores no seu modo de compreender Modelagem Matemática, objetivando elucidar aproximações ou distanciamentos entre elas. Para tanto, analisamos tais caracterizações a partir de lentes da filosofia da linguagem da obra Investigações Filosóficas, com base no que Ludwig Wittgenstein denota por ‘semelhanças de família’. A metodologia que embasa esse estudo segue orientações da pesquisa bibliográfica. Como resultados apresentamos, sob quais aspectos, as caracterizações de modelo matemático analisadas podem se aproximar ou se distanciar a partir de três ‘semelhanças de família’ identificadas. Tais resultados refletem nossas interpretações acerca dos termos e expressões mencionadas nas caracterizações de modelo matemático que trazemos para análise ou subentendidas nas definições de Modelagem Matemática que optamos por evidenciar nesse estudo.

Palavras-chave: Modelo Matemático, Modelagem Matemática, Linguagens, Semelhanças de Família.

Some evidences of 'family resemblances' in the mathematical model of characterizations

Abstract: Mathematical Modeling in the scope of Mathematics Education consist in a process of searching for a solution of a problem situation and that solution may be described or obtained from mathematical models. Thus, mathematical models can play an important role in the development of mathematical modeling activities and deserve to be understood in the context of their characterizations, including, in association with the modeling mathematical definition of the anchored. In this paper, we bring up some characterizations of mathematical model, raised by some researchers as a way of understanding Mathematical Modeling, objectifying to elucidate approximations or distances between them. For thus, we analyze such characterizations from lenses of the language philosophy on the book Philosophical Investigations, based on what Ludwig Wittgenstein denoted by

¹ Professora Adjunta da UNESPAR – Universidade Estadual do Paraná – Campus de União da Vitória. Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina – UEL.

² Aluno de Doutorado do Programa de Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina – UEL.

'family resemblances'. The methodology that underlies this study follows the bibliographical research orientations. As results we present, under which aspects, the mathematical model characterizations analyzed way move nearby or move away from of the three 'family resemblances' identified. These results reflect our interpretations about the terms and expressions mentioned in the mathematical model characterizations that we bring to analysis or implied in Mathematical Modeling settings we chose to highlight in this study.

Key-words: Mathematical Model, Mathematical Modelling, Languages, Family Resemblances.

Introdução

As concepções de Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática são diversas, contudo, elas constituem uma rede, na qual seus entrelaçamentos revelam aspectos comuns. Existe um problema a resolver, elaborado ou identificado a partir de um tema que se propõe a investigar; requer formas de proceder à investigação, que se processa a partir de ações que conduzem à produção de um resultado; fornece uma resposta ao problema, a qual é interpretada por meio da matemática, considerando características da situação em estudo.

Esses aspectos permitem inferir que há, nessas concepções, um reconhecimento de que a Modelagem Matemática consiste em um processo de busca por uma solução para uma situação problema e que tal solução pode ser descrita ou obtida a partir de modelos matemáticos. Muito embora a escolha de alguns pesquisadores da área seja por explicitar sua compreensão acerca do que é modelo matemático, há alguns que deixam seu modo de compreender implícito na definição de Modelagem Matemática que assumem. Daí o nosso interesse por elucidar possíveis aproximações ou distanciamentos entre as caracterizações de modelo matemático. Tendo isso como um propósito, direcionamos o nosso olhar para os termos e expressões mencionadas nas caracterizações de modelo matemático ou subentendidas nas definições de Modelagem Matemática que trazemos à tona neste trabalho.

Olhar para a linguagem explicitada nas caracterizações de modelo matemático ou nas definições de Modelagem Matemática nos remete à filosofia da linguagem na perspectiva de Ludwig Wittgenstein, uma vez que esse autor assevera que a linguagem está associada aos seus modos de uso. Entendemos uso, neste estudo, como um modo de compreensão e, por sua vez, como uma maneira de reconhecer o papel do modelo matemático no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática.

Se de maneira geral, uma atividade de modelagem matemática pode ser descrita “em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa

uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a final” (ALMEIDA, 2010, p. 399), é a esse conjunto de procedimentos, que evoca a obtenção de uma representação matemática que viabilize descrever e/ou analisar dada situação, que está associado o modelo matemático, foco de nossa investigação.

Assumimos orientações da pesquisa bibliográfica para desenvolver esse estudo uma vez que analisamos as entrelinhas das caracterizações de modelo matemático e/ou das definições de Modelagem Matemática apresentadas por seis pesquisadores renomados na área, a saber: Ademir Donizeti Caldeira, Ana Paula dos Santos Malheiros, Dionísio Burak, Jonei Cerqueira Barbosa, Jussara de Loiola Araújo e Lourdes Maria Werle de Almeida. Nessa análise nos valem dos termos e expressões usadas por esses autores para explicitar suas compreensões acerca do que é modelo matemático, recorrendo à noção de ‘semelhanças de família’ sugerida por Wittgenstein (2009).

Como aponta Veiga-Neto (2009)

se aceitarmos que as linguagens não repousam sobre nenhuma essência, estaremos aceitando, ipso facto, que elas não partilham – nem entre si, nem com mais nada – nenhuma essência. Mas, então, como sabemos quando estamos diante de algo que chamamos de linguagem? Wittgenstein responde: porque há um conjunto de semelhanças de família ao qual convencionamos chamar de linguagens... O máximo que podemos dizer de comum a elas é que são jogos ou, talvez melhor, funcionam como jogos (p. 118).

Assim, a questão que orienta a nossa investigação é: que aproximações ou distanciamentos existem nos jogos de linguagem utilizados pelos autores ao caracterizarem modelo matemático no âmbito da Modelagem Matemática na Educação Matemática?, e os dados que subsidiam nossa análise são algumas caracterizações de modelo matemático encontradas em livros que tratam especificamente de Modelagem Matemática na Educação Matemática.

Na busca por uma resposta a tal questão identificamos semelhanças de família nas caracterizações de modelo matemático, bem como reconhecemos aproximações ou distanciamentos entre elas. Sendo assim, trazemos nas seções subsequentes as caracterizações de modelo matemático trazidas para análise ou subentendidas nas definições de Modelagem Matemática que optamos por evidenciar nesse estudo e considerações acerca do que Ludwig Wittgenstein trata por semelhanças de família. Por fim, apresentamos nossas reflexões sobre a investigação realizada, seguidas das considerações finais.

2. Aspectos metodológicos do estudo

Embora no âmbito da pesquisa em Modelagem Matemática na Educação Matemática sejam vários os pesquisadores brasileiros que têm contribuído com os avanços na área, o critério que embasou a escolha dos seis autores, a saber: Ademir Donizeti Caldeira, Ana Paula dos Santos Malheiros, Dionísio Burak, Jonei Cerqueira Barbosa, Jussara de Loiola Araújo e Lourdes Maria Werle de Almeida, que selecionamos para realizar nosso estudo foi eles terem publicado e/ou organizado algum livro de Modelagem Matemática, no período compreendido entre os anos 2005 e 2014.

Conhecidas as obras publicadas e/ou organizadas por esses autores, a partir de uma consulta nos seus currículos disponibilizados na Plataforma Lattes, selecionamos todos os capítulos de livros que eles atuam como autor ou coautor e também os livros de sua autoria (Quadro 1).

Quadro 1 – Obras publicadas de 2005 a 2014

Autor e Coautor(es)	Título da Obra	Ano de publicação
Ademir Donizeti Caldeira	Etnomodelagem e suas relações com a educação matemática na infância	2007
Ademir Donizeti Caldeira Everaldo Silveira Maria Carolina Machado Magnus	Modelagem Matemática: alunos em ação	2011
João Frederico da Costa de A. Meyer Ademir Donizeti Caldeira Ana Paula dos Santos Malheiros	Modelagem em Educação Matemática	2011
Marcelo de Carvalho Borba Ana Paula dos Santos Malheiros	Diferentes formas de interação entre internet e modelagem: desenvolvimento de projetos e o CVM	2007
Ana Paula dos Santos Malheiros	A elaboração de projetos de modelagem por professores: algumas influências para a sala de aula de matemática	2011
Dionísio Burak	Uma perspectiva de modelagem matemática para o ensino e a aprendizagem da matemática	2010
Dionísio Burak Tiago Emanuel Klüber	Encaminhamentos didático-pedagógicos no contexto de uma atividade de Modelagem Matemática para a Educação Básica	2011
Dionísio Burak Rosália M. R. de Aragão	A modelagem matemática e relações com a aprendizagem significativa	2012
Jonei Cerqueira Barbosa	A prática dos alunos no ambiente de Modelagem Matemática: o esboço de um framework	2007
Jussara de Loiola Araújo	Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de Modelagem Matemática na Educação Matemática	2007
Jussara de Loiola Araújo Wanderley Sebastião de Freitas	Construção crítica de modelos matemáticos de uma experiência na divisão de recursos	2011

Alessandra Cristian da Silva	financeiros	
Lourdes Maria Werle de Almeida Michele Regiane Dias	Modelagem Matemática em cursos de formação de professores	2007
Lourdes Maria Werle de Almeida Rodolfo Eduardo Vertuan	Discussões sobre “como fazer” Modelagem Matemática na sala de aula	2011
Lourdes Maria Werle de Almeida Karina Alessandra Pessôa da Silva Rodolfo Eduardo Vertuan	Modelagem Matemática na educação básica	2012
Lourdes Maria Werle de Almeida Rodolfo Eduardo Vertuan	Modelagem Matemática na Educação Matemática	2014
Heloísa Cristina da Silva Lourdes Maria Werle de Almeida	Sobre Matematização e Modelagem Matemática	2014
Camila Fogaça de Oliveira Lourdes Maria Werle de Almeida	Práticas sociais e práticas matemáticas: um olhar sobre modelos de crescimento populacional	2014

Fonte: Os autores.

Essas obras, que se configuram o *locus* de nosso estudo, subsidiam nossas interpretações uma vez que buscamos, em um primeiro momento, identificar as compreensões desses autores sobre modelo matemático, seja no modo como o caracterizam, seja na forma como definem Modelagem Matemática, para depois, analisar tais compreensões à luz da filosofia da linguagem na perspectiva de Ludwig Wittgenstein.

Para proceder à análise realizamos um levantamento sobre o modo como aparece descrito, nas obras indicadas no Quadro 1, o termo modelo matemático. Contudo, quando não foi possível identificar a caracterização do autor acerca desse termo, recorreremos a sua descrição de Modelagem Matemática, visando encontrar vestígios sobre sua compreensão de modelo matemático.

Na seção que segue apresentamos as caracterizações de modelo matemático identificadas nas obras selecionadas, trazendo autor por autor. Para apresentá-las optamos por fazer um recorte dos trechos dessas obras que contém tais caracterizações. Esses recortes, que subsidiam nossas interpretações, nem sempre aparecem na ordem cronológica do ano de publicação da obra, contudo, foram assim organizados por conterem informações que se complementam.

3. Caracterizações de Modelo Matemático

Evidenciamos que nesta seção não há interesse por partes dos autores deste trabalho estabelecer interlocuções entre as caracterizações de modelo matemático aqui apresentadas, uma vez que o objetivo, neste momento, é apenas fazê-las conhecer. O que fazemos, portanto, é descrever as caracterizações de modelo matemático, autor por autor, ou os recortes que dão

indícios do modo como esses autores o compreendem. Nessa descrição sublinhamos alguns termos e expressões que retomaremos no momento da análise. Cabe lembrar que a análise consta na seção 5.

- Ademir Donizeti Caldeira

Em Caldeira (2007, p.82) o autor esclarece que sua concepção de educação matemática está sustentada nos “pressupostos da Modelagem Matemática como um processo de obtenção e validação de um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam um objeto estudado”. Também expõe que estes objetos estudados devem ser situações da realidade.

Ao explicitar sua compreensão de Modelagem Matemática esse autor coloca que

não necessariamente se faz presente um modelo do objeto no final do processo, pois o objetivo principal não é chegar ao modelo, o que importa é o processo que professor e estudante percorrem para alcançar uma situação de tomada de decisão ou compreensão do objeto estudado, claro, fazendo uso da matemática (CALDEIRA 2007, p. 83). (grifo nosso)

Caldeira, Silveira e Magnus (2011) ao se referirem à Modelagem Matemática na Educação Matemática fazem menção ao ato de modelar matematicamente e apoiam tal ato nas atividades escolares, sugerindo que

uma das possibilidades é inserir, nas atividades escolares, elementos das demandas locais, advindas da cotidianidade dos alunos, permitindo que eles, em conjunto com o professor, desenvolvam práticas que reflitam essa cotidianidade, elaborem e busquem soluções matemáticas para essas demandas, desenvolvendo, para além do pensamento e de conceitos matemáticos, a criatividade, a autonomia e o espírito de coletividade (p. 65).

Quando relatam uma experiência de Modelagem Matemática vivenciada em uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental, apontam que a

intenção era que eles (os alunos) percebessem que podíamos transformar nossa ideia inicial numa linguagem matemática, ou seja, elaborar uma ‘fórmula’ que facilitaria nossos cálculos e comparações acerca das diversas possibilidades, e que esta ‘fórmula’ ou modelo teria uma parte constante, que eram preços fixos e outra parte variando, dependente da quantidade de computadores na rede (CALDEIRA, SILVEIRA & MAGNUS, 2011, p. 73). (grifos nossos)

Em Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) os autores, ao explicarem o trabalho com Modelagem Matemática, evidenciam que simplificadamente

temos cinco momentos para o processo de Modelagem: 1) determinar a situação; 2) simplificar as hipóteses da situação; 3) resolver o problema matemático recorrente; 4) validar as soluções matemáticas de acordo com a questão real e, finalmente, 5) definir a tomada de decisão com base nos resultados (p. 28).

Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) ao exporem esses momentos deixam indícios de que a Matemática, no processo de Modelagem Matemática

deve ser aquela que possibilita o início da resolução do problema em questão, permitindo que a Modelagem possa continuar em sua espiral, na qual o modelo matemático produz novas ideias, que, por sua vez, afetam as hipóteses de simplificação ou que permitem negar uma hipótese (p. 29).

Sendo assim, se reportam ao modelo matemático como uma adequação do “problema à ferramenta matemática ao alcance da aprendizagem do aluno” (p. 28), indicando que isso leva a transformar o problema inicial em um problema matemático. “E isso se constitui em traduzir o problema para uma linguagem do universo matemático” (p. 28).

A obra supracitada é também de autoria de Ana Paula dos Santos Malheiros, próximo autora mencionada, porém, para evitar repetições optamos por apresentá-la junto ao conjunto de obras do autor Ademir Donizete Caldeira, já que ele tem mais tempo de trajetória na Modelagem Matemática.

- Ana Paula dos Santos Malheiros

Borba e Malheiros (2007) apoiam o seu trabalho com Modelagem Matemática com mídias tecnológicas e explicitam que ao trabalhar com ela os alunos escolhem temas quaisquer de seu interesse e desenvolvem projetos, e “com o auxílio do professor, é feito um esforço para modelar matematicamente o tema proposto pelos alunos, ou discutir por que certo conteúdo matemático deve ou não ser utilizado no contexto de um determinado problema” (p. 197).

Em Malheiros (2011) a autora descreve dois projetos de modelagem realizados por professores em um curso intitulado *Tendências em Educação Matemática: ênfase em Modelagem Matemática*.

Um dos projetos investigava a problemática dos planos de telefonia e “a partir do estudo comparativo, as alunas-professoras fizeram a análise das operadoras com o objetivo de verificar qual era a mais vantajosa” (MALHEIROS, 2011, p. 252). A análise foi ancorada no modelo apresentado no Quadro 2.

Quadro 2 – Modelo de “Plano ideal” apresentado em Malheiros (2011)

Pensando em apresentar ao consumidor um “plano ideal”, que ofereça somente as vantagens de cada um dos planos apresentados, e matematizando esses planos com os custos mais baixos possíveis nos dias/horários de tarifa mais cara, obtemos uma função definida por três leis, conforme esquema abaixo:

$$y = \begin{cases} 0,14x+23,59, & \text{para } 0 \leq x \leq 110 \\ 0,117x+39,09, & \text{para } 110 < x \leq 403 \\ 0,101x+65,19, & \text{para } x > 403 \end{cases}$$

sendo, y, o custo (em reais), e x, o tempo (em minutos) das ligações locais de fixo para fixo.

Fonte: Malheiros (2011, p. 253)

O segundo projeto investigava o campo de futebol.

Neste projeto de Modelagem, os alunos-professores elaboraram um modelo de um campo de futebol a partir de equações e outros conceitos matemáticos. Assim, o modelo aqui é a representação (figural/geométrica) de um campo de futebol e não uma sentença matemática (MALHEIROS 2011, p.255) (grifos nossos)

- Dionísio Burak

Em Burak (2010), a Modelagem Matemática é abordada como uma metodologia de ensino de matemática para a Educação Básica e, portanto, “toma configurações diferentes frente aos objetivos de tornar o ensino mais dinâmico e mais significativo, orientado por uma concepção de educação matemática pautada nas ciências humanas e sociais” (p. 35).

Assim, para Burak (2010), a Modelagem Matemática é assumida como um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos estudados e poder agir/pensar sobre eles.

Burak e Klüber (2011), discutem sobre Modelagem Matemática com foco no ensino e na aprendizagem da Matemática, esclarecendo que no “âmbito da Educação Básica, o trabalho com os modelos matemáticos, na perspectiva de Modelagem assumida, não constitui prioridade” (p. 51). Para os autores,

o modelo pode ser entendido como uma representação e, dessa forma, contempla e engloba, além dos modelos matemáticos, outros, tais como uma lista de supermercado ou a planta baixa de uma casa, que ainda que não se constituam em modelos preditivos, permitem, na maioria dos casos, a tomada de decisão (BURAK & KLÜBER, 2011, p. 51).

Para Burak e Aragão (2012), a etapa da resolução do(s) problema(s) confere à Modelagem Matemática, na Educação Básica, uma possibilidade de fazer “uso de todo o ferramental matemático disponível no estudante” (p. 95). Por vezes ele “pode se valer das situações empíricas para os primeiros resultados e as primeiras aproximações, e, mais tarde, ou mesmo já na sequência, desenvolver o conteúdo de forma analítica, com alguma formalização matemática” (BURAK & ARAGÃO, 2012, p. 96).

Esses autores acrescentam que

os modelos são construídos quando deseja-se expressar uma situação que enseja novos elementos ou alguma situação para a qual não se tem ou não se conhece uma expressão matemática. Muitas vezes, nesse nível de ensino, um modelo simples que reproduza as características gerais do fenômeno estudado, mesmo com uma matemática elementar, é suficiente e ainda deve-se levar em consideração o ferramental matemático disponível nesse período de escolarização do Ensino Fundamental e Médio. Outras vezes, a confecção experimental de um modelo, nessa fase de escolarização, é muito interessante e permite alcançar objetivos, tais como: conjecturar, levantar hipóteses, experimentar, refletir, desenvolver a autonomia, a capacidade de buscar novas estratégias e encaminhamentos (BURAK & ARAGÃO, 2012, p. 97).

- Jonei Cerqueira Barbosa

Barbosa (2007), após caracterizar Modelagem Matemática faz a seguinte afirmação: “chamo de modelo matemático qualquer representação matemática da situação em estudo” (p. 161).

- Jussara Loiola de Araújo

Araújo (2007), não explicita sua compreensão de modelo matemático, contudo, ao comentar que a “Modelagem Matemática na Educação Matemática têm como característica comum o objetivo de resolver algum problema não-matemático da realidade por meio de teorias e conceitos matemáticos” (p. 17), deixa indícios do modo como o compreende.

Em Araújo, Freitas e Silva (2011), os autores fazem menção ao termo modelo matemático ao se referirem à expressão “matemática é posta em ação” (p. 144). Após discutirem sobre alguns conhecimentos desenvolvidos no trabalho com Modelagem Matemática comentam que, na perspectiva de uma educação matemática crítica, deixam implícito que os modelos matemáticos se configuram teoremas, utilização de algoritmos,

aplicação de conteúdos matemáticos, meios para refletir sobre a matemática e sobre a situação em estudo.

- Lourdes Maria Werle de Almeida

Almeida e Dias (2007), conceituam modelo matemático com base na assertiva de D' Ambrósio (2003), de que a origem das ideias matemáticas é resultado de um processo que procura explicar e entender fatos e fenômenos observados na realidade. Assim, para essas autoras, modelos matemáticos são representações da realidade e contém o desenvolvimento de ideias matemáticas e uma organização intelectual expressa a partir de elaborações sobre representações da realidade.

Almeida e Vertuan (2011) – citando Lesh, Carmona e Hjalmarson (2006) – conceituam que um modelo matemático “consiste em um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou de uma estrutura matemática, com a finalidade de descrever o comportamento de outro sistema e permitir a realização de previsões sobre este outro” (p. 21).

Para Almeida, Silva e Vertuan (2012), “modelo” é caracterizado como a “representação de alguma coisa”, e sustenta tal caracterização no dicionário etimológico de Cunha (1989). Posteriormente, explicam que, não importando a finalidade, “o modelo é sempre uma tentativa de expor e/ou explicar características de algo que não está presente, mas se ‘torna presente’ por meio deste modelo” (p. 13).

Ao se referirem à Matemática completam que

um modelo matemático é um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, podendo mesmo permitir a realização de previsões sobre este outro sistema. Um modelo matemático é, portanto, uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam. Sua formulação, todavia, não tem um fim em si só, mas visa fomentar a solução de algum problema (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012, p. 13).

Almeida e Vertuan (2014), esclarecem que em Matemática

usamos e construímos modelos – modelos matemáticos – para explicar, representar e fazer previsões para situações e torná-las presentes usando matemática. O modelo matemático é então um sistema conceitual descritivo e aplicativo, que é expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, em geral, não matemático (p. 2).

As demais obras da autora Lourdes Maria Werle de Almeida com data de 2014 listadas no Quadro 1 trazem a mesma caracterização de modelo matemático utilizada em Almeida e Vertuan (2014). Sendo assim, para evitar repetições não a rerepresentaremos.

Na seção a seguir, trazemos considerações acerca de semelhanças de família.

Sobre ‘semelhanças de família’

A linguagem é o meio de comunicação do homem com o mundo. Mas seria mais adequado utilizarmos o termo linguagem ou linguagens? Considerando as argumentações de um renomado filósofo austríaco, Ludwig Wittgenstein, que revolucionou a filosofia da linguagem e cujos pressupostos tomamos como base para esse estudo, devemos assumir a linguagem como constitutiva da realidade, que nas palavras de Vilela e Mendes (2011, p. 8), significa olhar para a linguagem “em termos de atividade, como constitutiva das coisas, e não como meramente ‘descritiva’ delas”, ou seja, é recomendado falarmos de linguagens. Isso porque quando nos referimos a algo e comunicamos sobre esse algo, diversas interpretações podem ser/estar associadas, constituindo-se, portanto, um conjunto de significações³.

Wittgenstein (2009, § 43) ao dizer que o “significado de uma palavra é seu uso na linguagem” explicita que uma mesma palavra pode ter significados diferentes, dependendo do contexto no qual é empregada. A esses usos Wittgenstein (2009, § 7) denominou ‘jogos de linguagem’. De acordo com Izmirli (2013), Wittgenstein introduziu o termo jogos de linguagem para designar formas de linguagem mais simples do que a totalidade da própria linguagem.

Sendo assim, são os jogos de linguagem que definem então a linguagem ou as linguagens que cada indivíduo emprega durante as diversas funções que realiza na interação com o meio em que vive. Logo, devido ao grande número de jogos de linguagem, ocorre a existência de linguagens.

Para Ludwig Wittgenstein representar um objeto é descrevê-lo em palavras. Porém, os significados destas palavras são produzidos pelo sujeito imerso em jogos de linguagem; quando mudam os jogos de linguagem, mudam-se os conceitos e, conseqüentemente, mudam

³Ludwig Wittgenstein, em seu livro *Investigações Filosóficas*, argumenta que a atribuição de significado às palavras se dá pelo uso que fazemos delas nos diferentes contextos sociais.

também os significados das palavras. Desta forma, os significados estão atrelados ao modo como as palavras são usadas e ao contexto em que elas estão inseridas.

Mesmo que os jogos de linguagem apresentem regras específicas, podem existir regras em comum nos usos que se faz das palavras. Gottschalk (2004, p.321) assevera que “aprender o significado de uma palavra pode consistir na aquisição de uma regra, ou um conjunto de regras, que governa seu uso dentro de um ou mais jogos de linguagem”. Afinal, o jogo de linguagem consiste de linguagem e de atividades com as quais ela vem entrelaçada. Na prática do uso da linguagem “uma parte grita as palavras, a outra age de acordo com elas” (WITTGENSTEIN, 2009, § 43).

Já o significado, ultrapassa a linguagem. Ele está no uso da palavra e na maneira como esse uso se entrelaça com a forma de vida⁴ daquele que a utiliza. Segundo Condé (1998), as formas de vida são o ancoradouro último da linguagem; onde a linguagem se assenta, ou seja, é na forma de vida que a linguagem se sustenta, e as palavras que constituem essa linguagem (e o jogo de linguagem) recebem significado. Almeida (2014, p. 108), argumenta que “o uso da linguagem não é apenas uma atividade arbitrária, mas algo que é configurado de acordo com nossa experiência, pela nossa compreensão das regras em cada contexto específico”.

O que permite associar diferentes usos a uma mesma palavra são as amarras que podem ser estabelecidas entre os diversos significados atribuídos a ela. Tais significações, conforme assinalado por Wittgenstein (2009), compõem uma complexa rede de semelhanças, a qual o próprio autor convencionou chamar ‘semelhanças de família’.

Não posso caracterizar melhor essas semelhanças do que por meio das palavras “semelhanças familiares”; pois assim se sobrepõem e se entrecruzam as várias semelhanças que existem entre os membros de uma família: estatura, traços fisionômicos, cor dos olhos, andar, temperamento, etc., etc. – E eu direi: os ‘jogos’ formam uma família (WITTGENSTEIN, 2009, § 67).

As semelhanças de família seriam “parentescos” entre os jogos, semelhanças que percebemos entre uns com outros, mas não necessariamente entre todos. Podemos ver então

⁴Ludwig Wittgenstein utiliza a expressão ‘forma de vida’ no *Investigações Filosóficas* associada aos hábitos, costumes e ações que fundamentam as atividades em geral, realizadas pelo sujeito. Miguel (2014, p. 13), ao citar Miguel, Vilela e Moura (2010), argumenta que as formas de vida são “maneiras de agir comuns aos homens, isto é, em formas de organização instituídas por comunidades humanas que compartilham propósitos e maneiras de ver o mundo”.

cada jogo de linguagem como uma “peça” da linguagem, em que suas semelhanças e familiaridades se tornam as linguagens.

Sendo assim, semelhanças de família conectam diferentes jogos de linguagem (IZMIRLI, 2013), refletindo experiências de vida e relações das pessoas com o mundo e com elas mesmas, suscitando diversas significações. Veiga-Neto e Lopes (2007), indicam que

está-se diante de um caso de semelhanças de família quando aquilo que une os elementos que colocamos sob uma determinada classe não é necessariamente algum atributo comum a todos os elementos da classe. O que os une — a ponto de que nos autorizamos a colocá-los sob um mesmo guarda-chuva, isso é, dentro de uma mesma classe— é uma rede complexa de semelhanças que se entrecruzam ao acaso, sem obedecer a um padrão uniforme (p.11).

É nessa perspectiva que olhamos para a linguagem presente nas caracterizações de modelo matemático apresentadas na seção 3. Buscamos compreender como se dá os usos da linguagem que denotam o que os autores concebem por essa palavra (modelo matemático) no contexto que a utilizam a partir da identificação de semelhanças de família.

Em busca de semelhanças de família nas caracterizações de modelo matemático

Nessa seção evidenciamos familiaridades entre as caracterizações de modelo matemático apresentadas na seção 3, objetivando elucidar aproximações ou distanciamentos entre elas. Como já explicitado, as familiaridades que podem existir entre os jogos de linguagem presentes nas caracterizações de modelo matemático, não necessariamente ocorrem entre todos os jogos, uma vez que na concepção de linguagem adotada, o que vemos é “uma complicada rede de semelhanças que se sobrepõem umas às outras e se entrecruzam. Semelhanças em grande e em pequena escala” (WITTGENSTEIN, 2009, p. 52, § 66).

Como cada autor analisado, dentro de sua forma de vida específica, compreende, caracteriza e faz uso da Modelagem Matemática, bem como seus constituintes, como o modelo matemático, que é nosso foco neste estudo, de forma diferenciada, a busca por semelhanças de família nas suas caracterizações de modelo matemático está assentada nos jogos de linguagem que eles utilizam ao se referirem ao modelo matemático ou ao se reportarem a ele no modo como definem/compreendem Modelagem Matemática na Educação Matemática. Sendo assim, buscamos nos jogos de linguagem específico de cada autor, as possíveis semelhanças de família que os entrelaça.

Barbosa (2007), Almeida e Dias (2007), Almeida, Silva e Vertuan (2012), e Burak e Klüber (2011), quando se referem ao modelo matemático se utilizam do termo *representação(ões)*. O uso que esses autores fazem desse termo em seus jogos de linguagem é bastante próximo e revela que esse termo não está associado somente ao fato de representar, que é o significado desse termo, mas às circunstâncias às quais o termo é empregado. Ou seja, ao utilizarem o termo *representação(ões)* para caracterizar modelo matemático deixam explicitado que nessa representação são consideradas as características ora matemáticas, ora da situação em estudo.

Usos que se assemelham aos dos pesquisadores supracitados, são também encontrados em Caldeira (2007) e Malheiros (2011). O primeiro ao falar sobre “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam um objeto estudado” (p.82); e a segunda ao evidenciar que o modelo matemático apresentado por meio de uma função definida por três sentenças ou o modelo que representa o campo de futebol relaciona aspectos da situação em estudo. Almeida e Vertuan (2014), também fazem alusão ao termo representação quando afirmam que o modelo matemático ‘torna presente’ as situações em estudo a partir da matemática.

Procurando pelo significado da palavra representar em dicionários de língua portuguesa, encontramos que representar é ser a imagem ou reprodução de algo. Dessa significação, e aliados à forma como os autores se utilizam desse termo, inferimos que ao caracterizarem modelo matemático como uma representação, esses autores concebem modelo matemático como a imagem ou reprodução de algo. Contudo, nesses jogos de linguagem usados pelos autores podemos nos perguntar: quem, ou o que, o modelo matemático está representando? E de que forma ocorre esta representação?

Para Barbosa (2007), o modelo matemático representa a situação em estudo. Almeida e Dias (2007), colocam que os modelos matemáticos são representações da realidade e contém o desenvolvimento de ideias matemáticas. Almeida, Silva e Vertuan (2012), descrevem que o modelo matemático é “uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam” (p.13). Esses destaques das falas dos autores sinalizam o que está sendo representado pelo modelo matemático. Já os dizeres de Caldeira (2007), Malheiros (2011) e Almeida e Vertuan (2014), indicam que a matemática (“conjunto de símbolos e relações matemáticas” (Caldeira, 2007, p.82), “equações e outros conceitos matemáticos” (Malheiros, 2011, p. 255), “usando matemática” (Almeida e Vertuan, 2014, p. 2)) é a forma pela qual acontece tão representação.

Nos recortes a seguir, muito embora os autores Burak (2010), Caldeira, Silveira e Magnus (2011), Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) e Almeida e Vertuan (2011), não se utilizam do termo representação para caracterizar ou se referirem ao modelo matemático, a forma como explicitam sua compreensão sobre ele deixa indícios de que o modelo matemático está representando algo e que essa representação acontece por meio da matemática.

- construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente (Burak, 2010);
- ato de modelar matematicamente (Caldeira, Silveira e Magnus, 2011);
- transformar nossa ideia inicial numa linguagem matemática, ou seja, elaborar uma ‘fórmula’ que facilitaria nossos cálculos e comparações acerca das diversas possibilidades (Caldeira, Silveira e Magnus, 2011, p. 73);
- modelo matemático como uma adequação do “problema à ferramenta matemática ao alcance da aprendizagem do aluno” (p. 28), indicando que isso leva a transformar o problema inicial em um problema matemático. “E isso se constitui em traduzir o problema para uma linguagem do universo matemático” (Meyer, Caldeira e Malheiros, 2011, p. 28);
- modelo matemático vem expresso por meio de uma linguagem ou de uma expressão matemática (Almeida e Vertuan, 2011).

Nos trechos evidenciados, os termos situação em estudo, representações da realidade, representação simplificada da realidade e as demais expressões acima destacadas, que foram utilizados na caracterização de modelo matemático, estão associados aos contextos nos quais esses termos foram cunhados, ou seja, estão associados à forma de vida dos autores e dos usos que fazem dos modelos matemáticos no âmbito da Modelagem Matemática na Educação Matemática.

Inferimos, portanto, que o modelo matemático, para esse conjunto de autores, se refere a uma situação não-matemática normalmente da realidade⁵ do modelador⁶ e, que tal modelo, por representar algo, vem expresso por meio de linguagem ou estruturas matemáticas.

Assim, uma primeira semelhança de família que identificamos nas caracterizações de modelo matemático de alguns dos autores analisados está ancorada no uso que eles fazem da

⁵ Não iremos discutir sobre a origem do termo realidade em cada concepção de modelo matemático e Modelagem Matemática. Para um estudo mais aprofundado sobre realidade na Modelagem Matemática consultar Veleda (2010).

⁶ Nesse texto consideramos o modelador como sendo o aluno e a realidade é aquela na qual este está inserido.

palavra representação ou nos jogos de linguagem usados por eles para denotar que o modelo matemático está associado a uma representação.

Como o modelo matemático se relaciona, de alguma maneira e sob alguns aspectos, a uma situação em estudo, alguns autores o associam à resolução do problema advindo de tal situação e que, de certo modo, originou a atividade de modelagem matemática.

Araújo (2007), por exemplo, ao explicar que a Modelagem Matemática resolve algum problema não-matemático da realidade por meio de teorias e conceitos matemáticos, deixa indícios de que o modelo matemático é o meio pelo qual se resolve tal problema.

Meyer, Caldeira e Malheiros (2011), e Almeida, Silva e Vertuan (2012) também se reportam à resolução do problema quando se referem ao modelo matemático. Os trechos a seguir evidenciam a associação problema e modelo matemático.

- resolver o problema matemático recorrente (Meyer, Caldeira e Malheiros, 2011);
- sua formulação (do modelo matemático), todavia, não tem um fim em si só, mas visa fomentar a solução de algum problema (Almeida, Silva e Vertuan, 2012, p. 13).

Caldeira (2007) e Malheiros (2011), embora não mencionam explicitamente que o modelo matemático se associa a um problema, deixam indícios em suas assertivas, apresentadas a seguir, que tal associação acontece.

- o objetivo principal não é chegar ao modelo, o que importa é o processo... (Caldeira, 2007, p. 83);
- a partir do estudo comparativo (dos modelos), as alunas-professoras fizeram a análise das operadoras com o objetivo de verificar qual era a mais vantajosa (Malheiros, 2011, p. 252);

Sendo assim, nos jogos de linguagem desses autores o modelo matemático associa-se ao problema. Ou o modelo matemático é assumido como um meio para resolver o problema, ou ele é reconhecido como sendo a solução do problema. Essa evidência nos leva a identificar uma segunda semelhança de família: nas caracterizações de modelo matemático de alguns dos autores, esse termo vem associado ao problema da atividade de modelagem matemática.

Para alguns dos autores analisados o modelo matemático também é responsável por possibilitar interpretações sobre a situação em estudo que extrapola o fato de se obter uma

resposta para o problema investigado. Tal consideração pode ser observada nos recortes a seguir:

- a confeção experimental de um modelo, nessa fase de escolarização, é muito interessante e permite alcançar objetivos, tais como: conjecturar, levantar hipóteses, experimentar, refletir, desenvolver a autonomia, a capacidade de buscar novas estratégias e encaminhamentos (Burak e Aragão, 2012, p. 97);
- usamos e construímos modelos – modelos matemáticos – para explicar e fazer previsões para situações (Almeida e Vertuan, 2014);
- o modelo é sempre uma tentativa de expor e/ou explicar características de algo (Almeida, Silva e Vertuan, 2012);
- “matemática é posta em ação” (Araújo, Freitas e Silva, 2011, p.144);
- modelos são meios para refletir sobre a matemática e sobre a situação em estudo (Araújo, Freitas e Silva, 2011).

Nesses recortes a caracterização de modelo matemático ou a alusão a esse termo está associada ao fato do pensar sobre a situação em estudo, ou aspectos dela, a partir da solução obtida para o problema investigado ou da matemática envolvida na formulação do modelo matemático. Assim, o modo como esses autores concebem modelo matemático podem estar relacionados às suas formas de vida e aos usos que ele fazem da Modelagem Matemática e, em particular, dos modelos matemáticos em suas vidas profissionais.

Os jogos de linguagens presentes nesses recortes que caracterizam modelos matemáticos se entrelaçam em torno do uso da matemática para, de modo a compor uma terceira semelhança de família. Tal semelhança, portanto, se relaciona ao uso da matemática para compreender a situação em estudo, analisar a solução obtida no sentido de sua aceitabilidade como resposta ao problema investigado, estudar a matemática envolvida na formulação e resolução de tal situação ou problema.

Identificamos então nesse estudo três semelhanças de família nas caracterizações de modelo matemático dos autores analisados, que estão associadas: ao uso da palavra representação, à resolução do problema que originou a atividade de modelagem matemática e ao uso da matemática para.

A seguir trazemos nossas reflexões acerca do estudo realizado, bem como apresentamos as possíveis aproximações ou distanciamentos entre as caracterizações de modelo matemático, objetivo de nossa investigação.

Considerações finais

A Modelagem Matemática envolve a problematização e a investigação de temas de contextos diversos e possibilita o estudo de uma situação advinda de tais contextos a partir de um conjunto de procedimentos, sobretudo matemáticos, tendo como finalidade interpretar e/ou compreender aspectos da situação em foco. Sendo o modelo matemático o meio pelo qual a situação pode ser interpretada e compreendida, e estando ele associado a esse conjunto de procedimentos, é relativo ao modelo matemático que tecemos algumas considerações neste trabalho.

Na intenção de conhecer como esse elemento da Modelagem Matemática na Educação Matemática é assumido por alguns autores da área, olhamos para as caracterizações de modelo matemático na perspectiva de seis autores: Ademir Donizeti Caldeira, Dionísio Burak, Ana Paula dos Santos Malheiros, Jonei Cerqueira Barbosa, Jussara Loiola de Araújo e Lourdes Maria Werle de Almeida. Nosso objetivo era elucidar aproximações ou distanciamentos entre tais caracterizações.

Visando atingir tal objetivo consideramos como *locus* de nosso estudo as obras (livros e capítulos de livros) desses seis autores, localizando nelas como eles se referem ao modelo matemático. Essas obras subsidiam nossas interpretações uma vez que buscamos identificar nelas as compreensões desses autores sobre modelo matemático, seja no modo como o caracterizam, seja na forma como definem Modelagem Matemática, para depois, analisar tais compreensões à luz da filosofia da linguagem na perspectiva de Ludwig Wittgenstein. Para proceder à análise do modo como esses autores concebem modelo matemático nos valem do conceito de semelhanças de família denotado por Ludwig Wittgenstein na sua obra de maturidade “Investigações Filosóficas”.

O uso que os autores fazem da linguagem, nos contextos nos quais a utilizam, ao se reportarem ao modelo matemático, conduziram-nos a identificar três semelhanças de família. Uma está associada à *representação* – o modelo matemático é considerado, por alguns, para representar algo. Ele ao mesmo tempo em que está relacionado à situação estudo, se utiliza da matemática para representar esse algo.

Uma segunda semelhança de família associa o modelo matemático à resolução do problema da atividade de modelagem matemática. Nesse jogo de linguagem o modelo

matemático é assumido como um meio para resolver o problema, ou ele é reconhecido como sendo a solução do problema.

A terceira semelhança de família identificada refere-se ao fato de o modelo matemático carregar com ele o *uso da matemática para* compreender a situação em estudo. Assim, o modelo matemático serve para provocar uma análise da situação em estudo, a partir da solução obtida, uma vez que ela precisa ser reconhecida, ou não, como uma resposta ao problema investigado. Tal modelo, portanto, em associação com os conceitos matemáticos nele requeridos serve como suporte para análise da situação em estudo quando se tem a intenção de compreendê-la.

Os jogos de linguagens que sustentam essa semelhança de família se entrelaçam em torno do *uso da matemática para*, seja no sentido de valorizar a aplicabilidade da matemática, seja na possibilidade de pensar ou agir sobre a situação a partir de lentes da matemática.

Cabe destacar que não é nossa intenção elencar uma caracterização essencial para modelo matemático, isto é, uma caracterização que represente *modelo matemático* de forma ideal. Ao contrário, apenas observamos algumas caracterizações e usos de modelo matemático e comparamos o que as aproximam ou as distanciam a partir das semelhanças de família identificadas.

Como produto da análise realizada, inferimos que, embora os autores utilizem termos e expressões diferentes para caracterizar modelo matemático, há mais aproximações sobre o modo como os autores compreendem modelo matemático, que distanciamentos. Isso porque as caracterizações de modelo matemático por eles enunciadas se entrecruzam em alguns, ou em vários aspectos, constituindo-se uma rede complexa de semelhanças. Os diferentes usos da linguagem para se referir ao modelo matemático, permitem amarras entre os diversos significados atribuídos a ele.

As aproximações entre as caracterizações de modelo matemático acontecem tanto relativas ao contexto no qual os autores estão inseridos e no qual descrevem teoricamente sobre modelo matemático como quando descrevem acerca da sua prática em Modelagem Matemática.

Essas semelhanças de família não apontam uma equivalência de caracterizações de modelo matemático, representadas aqui pelas obras de nosso *locus*, pois, distanciamentos entre elas são identificáveis; por exemplo, no que diz respeito ao uso do modelo matemático na Modelagem Matemática – para Burak e Klüber (2011) não necessariamente é preciso construir um modelo matemático para que se configure uma Modelagem Matemática,

enquanto que em Almeida, Silva e Vertuan (2012) o uso do modelo matemático é constante e recorrente –, também em como entendem a Matemática – para Almeida e Vertuan (2011) a matemática é aquela acadêmica constituída formalmente, enquanto para Caldeira, Silveira e Magnus (2011) essa matemática é uma das matemáticas constituídas socialmente.

Concluimos, portanto, que as semelhanças de família elucidadas nesse estudo revelam que os autores, embora se utilizam de linguagens diferentes para se referir ao modelo matemático, na práticas, tais linguagens tecem uma trama entrelaçada. As caracterizações de modelo matemático descritas se aproximam, ora com um autor, ora com mais de um autor. Esse entrelaçamento entre o modo de compreender modelo matemático, associado à definição de Modelagem Matemática assumida por cada um dos autores considerados nesse estudo, certamente favorece para o fortalecimento da área da Modelagem Matemática na Educação Matemática e, de modo geral, pode promover avanços nas pesquisas, uma vez que os jogos de linguagem por eles utilizados se constituem uma base sólida que sustenta as discussões acerca de modelo matemático no âmbito dessa área.

Referências

ALMEIDA, L. M. W. The “practice” of mathematical modeling under a wittgensteinian perspective. **RIPEM**, v. 4, n. 2, p. 98-113, 2014.

ALMEIDA, L. M. W. de; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Matemática**. In: ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. (orgs.) Modelagem Matemática em foco. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2014.

ALMEIDA, L. M. W. de; OLIVEIRA, C. F. de. **Práticas sociais e práticas matemáticas: um olhar sobre modelos de crescimento populacional**. In: ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. (orgs.) Modelagem Matemática em foco. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2014.

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, H. C. da. **Sobre Matematização e Modelagem Matemática**. In: ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. (orgs.) Modelagem Matemática em foco. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2014.

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. 1ª. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W. de; VERTUAN, R. E. **Discussões sobre “como fazer” Modelagem Matemática na sala de aula**. In: ALMEIDA, L. M. W. de; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. Práticas de modelagem matemática na educação matemática: relatos de experiências e propostas pedagógicas. 1. ed. Londrina: Editora da Universidade Estadual de Londrina, 2011.

ALMEIDA, L.M.W. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. *Zetetiké*, Campinas, v. 18, número temático, p. 379-406, 2010.

ALMEIDA, L. M. W. de; DIAS, M. R. **Modelagem Matemática em cursos de formação de professores**. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAUJO, J. L. Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais. 1/1. ed. Recife: Editora da SBEM, 2007.

ARAÚJO, J. de L.; FREITAS, W. S. de; SILVA, A. C. da. **Construção crítica de modelos matemáticos: uma experiência na divisão de recursos financeiros**. In: ALMEIDA, L. M. W. de; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. Práticas de modelagem matemática na educação matemática: relatos de experiências e propostas pedagógicas. 1. ed. Londrina: Editora da Universidade Estadual de Londrina, 2011.

ARAÚJO, J. de L. **Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de Modelagem Matemática na Educação Matemática**. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAUJO, J. L. Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais. 1/1. ed. Recife: Editora da SBEM, 2007.

BARBOSA, J. C. **A prática dos alunos no ambiente de Modelagem Matemática: o esboço de um framework**. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAUJO, J. L. Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais. 1/1. ed. Recife: Editora da SBEM, 2007.

BORBA, M. de C.; MALHEIROS, A. P. dos S. **Diferentes formas de interação entre internet e modelagem: desenvolvimento de projetos e o CVM**. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAUJO, J. L. Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais. 1/1. ed. Recife: Editora da SBEM, 2007.

BURAK, D.; ARAGÃO, R. M. R. de. **A modelagem matemática e as relações com a aprendizagem significativa**. 1. ed. Curitiba: CRV, 2012.

BURAK, D.; KLÜBER, T. E. **Encaminhamentos Didático-Pedagógicos no contexto de uma atividade de Modelagem Matemática para a Educação Matemática**. In: ALMEIDA, L. M. W. de; ARAÚJO, J. L. BISOGNIN, E. Práticas de modelagem matemática na educação matemática: relatos de experiências e propostas pedagógicas. 1. ed. Londrina: Editora da Universidade Estadual de Londrina, 2011.

BURAK, D. **Uma perspectiva de modelagem matemática para o ensino e a aprendizagem da matemática**. In: BRANDT, C. F.; BURAK, D.; KLÜBER, T. E. (orgs.) Modelagem Matemática uma perspectiva para a Educação Básica. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2010.

CALDEIRA, A. D.; SILVEIRA, E.; MAGNUS, M. C. M. **Modelagem Matemática: alunos em ação**. In: ALMEIDA, L. M. W. de; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. Práticas de modelagem matemática na educação matemática: relatos de experiências e propostas pedagógicas. 1. ed. Londrina: Editora da Universidade Estadual de Londrina, 2011.

CALDEIRA, A. D. **Etnomodelagem e suas relações com a educação matemática na infância**. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAUJO, J. L. Modelagem Matemática

na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais. 1/1. ed. Recife: Editora da SBEM, 2007.

CONDÉ, M. L. L. **Wittgenstein, linguagem e mundo**. São Paulo: Annablume, 1998.

GOTTSCHALK, C.M.C. A natureza do conhecimento matemático sob a perspectiva de Wittgenstein: implicações educacionais. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**. Campinas, v. 14, n.2, p. 305-334, jul./dez., 2004.

IZMIRLI, I. M. Wittgenstein as a social constructivist. **Philosophy of Mathematics Education Journal**, no. 27, abr., 2013.

MALHEIROS, A. P. dos S. **A elaboração de projetos de modelagem por professores: algumas influências para a sala de aula de matemática**. In: ALMEIDA, L. M. W. de; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. Práticas de modelagem matemática na educação matemática: relatos de experiências e propostas pedagógicas. 1. ed. Londrina: Editora da Universidade Estadual de Londrina, 2011.

MEYER, J. F. da C. de A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. dos S. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica editora, 2011.

MIGUEL, A. Is the mathematics education a problem for the school or is the school a problem for the mathematics education? **RIPEM**, v. 4, n. 2, p. 5-35, 2014.

VEIGA-NETO, A.; LOPES, M. C. **Identidade, cultura e semelhanças de família: as contribuições da virada linguística**. In: BIZARRO, R. (org.). Eu e o outro: Estudos Multidisciplinares sobre Identidade(s), Diversidade(s) e Práticas Interculturais. Porto: Areal, 2007.

VEIGA-NETO, A. Nietzsche e Wittgenstein: alavancas para pensar a diferença e a Pedagogia. **Mutatis Mutandis**, v. 2, n. 1, 2009.

VELEDA, G. G. **Sobre a realidade em atividades de modelagem matemática**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

VILELA, D. S.; MENDES, J. R. A linguagem como eixo da pesquisa em educação matemática: contribuições da filosofia e dos estudos do discurso. **Zetetiké**, Campinas, v. 1, n. 36, p. 7-25, jul./dez., 2011.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas**. 6. Ed. Tradução de Marcos G. Montagnoli. Petrópolis: Editora Vozes, 2009.