



## **Procedimentos manifestos por alunos do Ensino Fundamental em uma atividade de modelagem matemática**

**ÉlidaVELOZO Castro**, Licenciada em Matemática (Faculdade de Guairacá), Especialista em Ensino de Matemática (Faculdade Guairacá), Mestre pelo Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática pela Universidade Estadual do Centro Oeste - UNICENTRO, [elidamaiara@hotmail.com](mailto:elidamaiara@hotmail.com)

**Michele Regiane Dias Veronez**, Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática (Universidade Estadual de Londrina - UEL), Professora do Colegiado de Matemática (Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR), Chefe da Divisão de Extensão e Cultura (UNESPAR), Professora Colaboradora no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da UNICENTRO.

---

**Resumo:** Nosso objetivo neste trabalho é discutir sobre os procedimentos manifestos pelos alunos de um 8º ano do Ensino Fundamental ao desenvolverem a atividade de modelagem matemática intitulada Erva-Mate. Para tanto, apresentamos tais procedimentos em associação com suas ações cognitivas, conforme denotadas por Almeida e Silva (2012). Para o desenvolvimento desse trabalho assumimos a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica na qual se abordam situações do interesse do aluno e são possibilitados, na busca por uma solução para um problema identificado no contexto em foco, vários aprendizados, sobretudo de Matemática. A metodologia que sustenta esse estudo é de natureza qualitativa. Como resultado inferimos que os procedimentos manifestos pelos alunos retratam mobilização de seus conhecimentos, uma vez que estão relacionados ao seu modo de pensar, entender e administrar as informações sobre o tema em estudo que originou tal atividade de modelagem matemática, e sinaliza que não há linearidade nas ações cognitivas dos alunos. Ainda, que tal mobilização provoca um processo de idas e vindas em relação aos aspectos da situação ou problema em estudo, aos objetos matemáticos e às respostas reconhecidas como solução, para além de revelar que os procedimentos manifestos pelos alunos se complementam ao longo da atividade de modelagem matemática.

**Palavras-chave:** Atividades de modelagem matemática. Ações cognitivas. Procedimentos dos alunos.

### **Procedures manifested by Elementary School students in a mathematical modelling activity**

**Abstract:** Our objective in this paper is to discuss the procedures manifested by the students of an elementary school 8<sup>th</sup> grade class when developing the activity of mathematical modeling entitled “Erva-Mate”. In order to do so, we present such procedures in association with their cognitive actions, as denoted by Almeida e Silva (2012). For the development of this work we assume Mathematical Modelling as a pedagogical alternative in which situations of the student's interest are approached, in search for a solution to a problem identified in the context in focus, in which several moments of learning are made possible, especially of Mathematics. The methodology that supports this study is qualitative in nature. As a result, we infer that the procedures manifested by the students denote mobilization of their knowledge, since they are related to their way of thinking, understanding and managing the information about the subject in study that originated this activity of mathematical modelling, and indicates that there is no linearity in the students' cognitive actions. Still, that such mobilization provokes a process of comings and goings in relation to the aspects of the situation or problem under study, the mathematical objects and the answers recognized as solution, thus revealing that the manifested procedures by the students complement each other during the activity of mathematical modelling.

**Key-words:** Mathematical Modelling. Cognitive Actions. Student's procedures.

---

## Introdução

A afirmação que algumas pessoas fazem a respeito de que a Matemática é “verdadeira e inútil” e a dificuldade em perceber a Matemática em diferentes contextos, segundo Meyer, Caldeira e Malheiros (2013), deve-se ao fato de que as descobertas matemáticas só fazem sentido aos matemáticos, pois a maioria das pessoas não consegue relacioná-las nem com outras ciências, nem com situações do seu cotidiano, da sua realidade. Mesmo os povos da antiguidade tendo desenvolvido a Matemática para algum fim, conforme apontam Meyer, Caldeira e Malheiros (2013), considerando aspectos da Matemática sempre na perspectiva do que lhes era útil, não sustenta a ideia da utilidade e necessidade da Matemática para os dias atuais.

Com o propósito de discutir acerca da Matemática presente nas escolas e também na vida das pessoas, aliada à preocupação com questões sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática, surge a Educação Matemática. Considerando essa área de estudo, assumimos que um caminho para aproximar a Matemática da realidade do aluno pode ser possibilitado por meio da Modelagem Matemática<sup>1</sup>.

De modo geral, o trabalho com Modelagem Matemática desmistifica a ideia de que a Matemática é algo que está posto e que não se relaciona com situações do cotidiano. Isso porque a Modelagem Matemática envolve a busca por uma solução para um problema, que pode ser sugerido pelos alunos ou pelo professor; é um conjunto de procedimentos, que viabiliza o envolvimento com estruturas e conceitos matemáticos e uma análise consciente da resposta obtida para tal problema, podendo essa ser reconhecida, ou não, como solução. Nessa busca, professor e alunos têm, portanto, oportunidade de matematizar a situação em estudo e analisar as soluções, ao passo que reconhecem a Matemática em situações reais.

Partindo do pressuposto de que a Modelagem Matemática requer um comportamento ativo de professores e alunos, Almeida, Silva e Vertuan (2013) expõem que há necessidade de ambos buscarem relacionar conhecimento científico com conhecimento cotidiano, que levem em conta as características da situação em estudo das mais diversas naturezas.

Sendo assim, o trabalho com Modelagem Matemática considera ações diferenciadas de professores e alunos e diversifica as aulas, uma vez que sugere o estudo de problemas diferentes daqueles comumente propostos nos livros didáticos. Em Modelagem Matemática não há uma forma linear de tratar os conteúdos, isto é, professor e alunos vão se envolvendo com conceitos

---

<sup>1</sup>O termo “Modelagem Matemática” (em maiúsculo) será utilizado quando se referir à abordagem metodológica e, em minúsculo, quando se referir à atividade decorrente dessa abordagem.

matemáticos a partir do interesse por resolver o problema que suscitou a atividade de modelagem matemática e de melhor compreender a situação em foco.

Essa dinamicidade que a Modelagem Matemática sugere também possibilita um olhar atento para os procedimentos adotados pelos alunos. Em outros contextos, apenas o resultado final é considerado; já em atividades de modelagem matemática, os procedimentos utilizados ao longo do processo podem configurar-se como objeto de estudo, na medida em que eles servem como ponto de partida para discussões sobre o modo como o aluno compreende e soluciona situações da realidade por meio da matemática. Diante do exposto elegemos como objetivo deste trabalho discutir como os procedimentos manifestos por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, associados às ações cognitivas em Modelagem Matemática, se relacionam no desenvolvimento da atividade Erva-Mate.

Trazemos nas seções subsequentes aspectos da Modelagem Matemática na Educação Matemática sob a perspectiva cognitivista, conforme orientações de Kaiser e Sriraman (2006), considerações sobre o papel do professor e do aluno em contexto de atividades de modelagem matemática e a caracterização de ações cognitivas adotada neste trabalho. Em seguida, apresentamos uma atividade de modelagem matemática, intitulada Erva-Mate, buscando identificar os procedimentos manifestos pelos alunos ao longo dessa atividade e associando-os às suas ações cognitivas. Por fim, trazemos as considerações finais.

97

### **Modelagem Matemática sob uma perspectiva cognitivista**

Em Modelagem Matemática, de acordo com o interesse, o professor pode adotar diferentes encaminhamentos. Tais encaminhamentos evidenciam diferentes perspectivas da Modelagem Matemática, se compreendidas sob as lentes de Kaiser e Sriraman (2006). Essas autoras argumentam que a perspectiva pode variar de acordo com o objetivo central que orienta o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática e as classificam como: perspectiva realística ou aplicada, perspectiva contextual, perspectiva sócio-crítica, perspectiva epistemológica ou teórica, perspectiva educacional e perspectiva cognitivista.

Embora reconheçamos que uma atividade de modelagem matemática pode apresentar traços de mais de uma perspectiva, na presente investigação adotamos como pano de fundo a perspectiva cognitivista da Modelagem Matemática. Essa perspectiva, segundo Kaiser e Sriraman (2006) tem como pressuposto “favorecer que os alunos mobilizem conhecimentos, da situação, de matemática e de ambos, de forma articulada” (VERONEZ, 2013, p. 30). Para

Kaiser e Sriraman (2006), considerar a Modelagem Matemática na perspectiva cognitivista é propor-se a analisar as escolhas que os alunos fazem e as atitudes que assumem quando buscam por uma solução para a situação problema que originou a atividade de modelagem matemática.

No âmbito da Modelagem Matemática na Educação Matemática diversos são os trabalhos realizados à luz da perspectiva cognitivista; dentre eles destacamos Borromeo Ferri (2006, 2007, 2010), Almeida e Palharini (2012), Vertuan (2013) e Veronez (2013).

Borromeo Ferri (2006, 2007, 2010), em seus trabalhos sobre Modelagem Matemática, propõe-se a estudar os estilos de pensamento matemático na transição do mundo real para a matemática<sup>2</sup>. Borromeo Ferri (2006) discute sobre a rota de modelagem<sup>3</sup> com enfoque nos procedimentos cognitivos dos alunos durante essa transição. Para a autora, os procedimentos cognitivos envolvidos na Modelagem Matemática apontam indícios das competências dos alunos e implicações para o ensino da Matemática. Em Borromeo Ferri (2007), a autora também traz considerações sobre o comportamento do professor, suas ações e interações, diante dos procedimentos cognitivos dos alunos quando se envolvem com atividades de modelagem matemática.

Almeida e Palharini (2012) têm como propósito investigar a Modelagem Matemática como prática favorável ao desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. As autoras realizaram análises sobre a transição da situação inicial para a situação final e do conjunto de procedimentos adotados para solucionar o problema identificado na situação inicial, a partir de atividades de modelagem matemática desenvolvidas por estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática. Ademais, fazem reflexões e considerações sobre o pensamento matemático dos alunos e os processos cognitivos por eles mobilizados, o que lhes permite apontar que os alunos transitam pelos Três Mundos da Matemática<sup>4</sup> durante o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Os resultados obtidos indicam que atividades de modelagem matemática têm potencial para desencadear os processos de pensamento.

98

---

<sup>2</sup> Para Borromeo Ferri, diferente do que acreditamos neste trabalho, a Matemática e o mundo real existem isoladamente (Matemática separada do resto do mundo). Para essa autora a Modelagem Matemática é um meio para ligar o mundo real e a Matemática nos dois sentidos – da realidade para a Matemática e da Matemática para a realidade.

<sup>3</sup>Rota de Modelagem ou “Rota Modelling”, segundo Borromeo Ferri (2007), é o termo usado para denotar o processo individual de modelagem, em que o indivíduo começa o processo em certa fase, de acordo com as suas preferências, e, em seguida, passa por diferentes fases várias vezes ou apenas uma vez, focando em uma e ignorando outra, de acordo com o que requer a atividade.

<sup>4</sup>A perspectiva de David Tall surge do estudo das teorias de Sfard, Piaget e Bruner, que tratam do desenvolvimento cognitivo e da necessidade de explicar como se dá o aprendizado em Matemática. Tall associa o desenvolvimento cognitivo em relação à Matemática com “Os Três Mundos da Matemática”, sendo eles: O Mundo Conceitual Corporificado, O Mundo Simbólico Proceitual, O Mundo Axiomático Formal (ALMEIDA e PALHARINI, 2012).

No trabalho de Vertuan (2013), cuja coleta de dados aconteceu durante um curso intitulado “Investigações de assuntos do cotidiano por meio da Matemática”, voltado para alunos de um curso técnico profissionalizante vinculado ao Ensino Médio e alunos do curso de Licenciatura em Matemática, o autor teve como objetivo pesquisar como os alunos monitoram as próprias ações cognitivas no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática e quais as influências deste monitoramento no desenvolvimento da própria atividade de modelagem matemática. Concluiu, portanto, que práticas de monitoramento cognitivo são aprendidas pelos sujeitos em seu entorno social e cultural. Ainda mais, que tais práticas fortalecem a importância da *unicidade* da atividade de modelagem matemática e que, o trabalho em grupo exerce influência no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática e medeiam as aprendizagens dos diferentes sujeitos.

Veronez (2013) discute acerca dos signos utilizados e/ou produzidos pelos alunos, de um curso de Licenciatura em Matemática, quando eles mobilizam um conjunto de ações cognitivas ao desenvolver atividades de modelagem matemática. A autora elucida os papéis desses signos nos encaminhamentos tomados pelos alunos na busca por uma solução para o problema que originou a atividade de modelagem matemática. Veronez (2013) pontua que os signos mobilizados ou produzidos durante cada ação cognitiva associam-se a diferentes contextos de referência<sup>5</sup> e encontram-se, de certa forma, entrelaçados, o que favorece a emergência de outros signos que “atrelados a outra ação cognitiva se relacionam a outro contexto de referência que geram outros signos e assim por diante, sempre em conexão com o conceito suscitado em cada ação cognitiva dos alunos” (p.156).

99

De maneira geral, os trabalhos que adotam a Modelagem Matemática visam analisar e compreender aspectos relacionados ao pensar e agir dos alunos quando envolvidos com atividades de modelagem matemática em contextos educacionais.

A caracterização de Modelagem Matemática que adotamos é a de que ela se “constitui uma alternativa pedagógica em que se aborda, por meio da Matemática, um problema não essencialmente matemático” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, p. 9). Em outras palavras, consiste em abordar problemas ou situações da realidade e/ou do interesse do aluno, ao passo que ele se envolve em um processo de construção/mobilização de conhecimentos matemáticos e extramatemáticos.

---

<sup>5</sup> Problema em estudo. Uma situação que se conhece.

Nesse sentido, atividades de modelagem matemática possibilitam que os alunos se envolvam com um conjunto de atitudes, mediante as quais se definem estratégias de ação em relação ao problema identificado na situação de interesse e que de certo modo aparecem implícitos nos modelos matemáticos que elaboram. Modelo matemático, nesse caso, “é o que ‘dá forma’ à solução do problema” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, p.15). Nessa compreensão o modelo matemático se apresenta por meio de uma estrutura matemática, podendo ser uma tabela, um gráfico, uma expressão, uma equação, uma função.

Possibilitar ao aluno o envolvimento com situações da sua realidade, de seu interesse, a ponto que ele compreenda conceitos matemáticos é, portanto, uma característica da Modelagem Matemática na Educação Matemática. Nesse contexto Almeida, Silva e Vertuan (2013, p.12) expõem que

uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final.

São as relações entre realidade (origem da situação inicial) e Matemática (área em que os conceitos e os procedimentos matemáticos estão fundamentados) que contribuem para ativar, produzir e/ou integrar conhecimentos matemáticos e não matemáticos. A situação inicial, problemática, os autores associam ao lócus no qual se originou o problema a ser investigado, e à situação final, a uma resposta para esse problema.

100

Uma característica relevante de uma atividade de modelagem matemática é o trabalho em grupo, uma vez que organizados em grupos os alunos têm oportunidade de refletir, decidir e agir sobre as mais diversas situações, favorecendo um olhar crítico para elas, já que podem ser analisadas e compreendidas a partir de diferentes pontos de vista. Ao tratar de diversas situações problema, advindas da concepção do que lhes é útil, real, por meio de diferentes olhares, no contexto de Modelagem Matemática, o conhecimento passa a ter significado para o aluno e, na medida em que ele não se depara mais com problemas rotineiros retirados de livros-texto, em que se repetem enunciados, fórmulas e modelos, torna-se responsável pela própria aprendizagem que deverá ser resultado de uma reflexão crítica e de argumentos consistentes.

Segundo Meyer, Caldeira e Malheiros (2013), “os verdadeiros problemas na sociedade vêm, muitas vezes, sem a pergunta! Quem dirá as respostas” (p. 97). Esses autores consideram que a Modelagem Matemática permite incorporar o saber do aluno nas práticas de sala de aula, bem como retrata a necessidade de conceitos matemáticos para realizar uma aproximação

crítica e consciente de soluções obtidas para uma situação problema advinda da concepção do que lhes é útil, real.

Isso implica reconhecer que tão importante quanto a solução para o problema são os encaminhamentos e procedimentos que medeiam a transição da situação inicial para a situação final.

A resposta para o problema depende, de modo geral, dos encaminhamentos e procedimentos adotados pelos alunos e de seus conhecimentos e das intervenções realizadas pelo professor. Todavia, é importante que tais intervenções e a independência dos alunos mantenham certo grau de equilíbrio, de forma a garantir autonomia dos alunos frente ao problema em estudo e em relação às estratégias de resolução adotadas (VERONEZ, 2013, p. 27).

Assim, é importante compreender o papel do professor e do aluno, no contexto de sala de aula, durante o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

### **Professor e alunos no contexto de atividades de modelagem matemática**

Se uma atividade de modelagem matemática consiste em trabalhar com uma situação problema advinda da realidade e/ou do interesse do aluno, a prática do professor não se baseia em cumprir o conteúdo previsto no currículo. Cabe a esse profissional orientar os alunos para que eles mesmos sejam capazes de identificar problemas reais e desenvolver habilidades de reconhecer a Matemática como fonte de interpretação de situações e, inclusive, a possibilidade de solucionar problemas. Segundo Meyer, Caldeira e Malheiros (2013, p. 49), “o nosso papel, como professores, não é simplesmente colocar a Matemática neutra do currículo para os alunos, mas fazer com que eles também tragam situações de fora para dentro da escola”.

Conforme Veronez (2013), no trânsito da situação inicial para a situação final ao longo de uma atividade de modelagem matemática, o professor tem oportunidade de ensinar Matemática à medida que possibilita aos alunos o envolvimento com conceitos matemáticos e com aspectos de uma situação em estudo. Portanto, segundo a autora, o papel do professor em Modelagem Matemática consiste, de maneira geral, em incentivar o espírito crítico, a reflexão e a busca por argumentos e razões que possibilitem aos alunos confirmar ou não suas proposições e não apenas seguir padrões.

Entendemos, dessa forma, que há uma quebra de paradigma, em que o professor sai da zona de conforto do trabalho com conteúdos preestabelecidos e isolados e passa a ter atitude dinâmica e desafiadora. Para Dias (2005, p. 42), “a efetivação da Modelagem Matemática como

alternativa pedagógica depende do compromisso do professor e exige deste um conhecimento que não se limita a aspectos teóricos”. A autora destaca ainda que, mais que construir conhecimentos matemáticos, as atividades de modelagem matemática devem constituir para os alunos um instrumento de reflexão, decisão e ação sobre a realidade, ou seja, a formação do aluno enquanto ser social.

Em um ambiente de Modelagem Matemática o papel do professor consiste em incentivar o espírito crítico, a reflexão e a procura de argumentos e evasões que permitam aos alunos confirmar ou não suas conjecturas. Cabe também ao professor estimular a comunicação entre os alunos. Ao organizar o momento de discussão das atividades desenvolvidas pelos alunos o professor precisa tomar o cuidado de valorizar igualmente suas opiniões e resultados obtidos. Por vezes, pode ser útil o professor proporcionar um momento de discussão durante a realização da atividade com o objetivo de ajudar os alunos a ultrapassar certas dificuldades, de motivá-los em fases mais críticas do desenvolvimento da atividade, ou mesmo de enriquecer a investigação sobre o problema em estudo. Esse momento é também uma boa ocasião para promover a reflexão sobre a atividade bem como sobre o papel da Matemática na sociedade (DIAS, 2005, p.43).

Assim, o professor é quem, muitas vezes, conduzirá os alunos a ideias, questionamentos e conhecimentos matemáticos. Isso pode acontecer de maneira espontânea; quando se propõem discussões, ajuda-se a superar dificuldades, motiva-se a investigação, e ao promover reflexões matemáticas ou extramatemáticas a respeito da situação problema em contexto.

102

O papel do professor é, portanto, de orientador do processo de ensino e aprendizagem, o que segundo Almeida, Silva e Vertuan (2013), significa que cabe a ele indicar caminhos e fazer perguntas continuamente, porém sem entregar a resposta; estar em constante aprendizagem, ao mesmo tempo em que mantém a autoridade em sala de aula.

Dessa forma, os alunos são os sujeitos principais e o professor, o orientador do processo. A ênfase reside na relação do aluno com o conhecimento, sendo mediada pelo professor, profissional que precisa estar disposto a colaborar no processo de construção desse conhecimento. Por meio da Modelagem Matemática o aluno poderá relacionar resultados matemáticos a uma situação real, o que possibilita a tomada de decisão perante uma questão do seu cotidiano, como também o reconhecimento de “onde, quando e/ou em que” utilizamos a Matemática, indagação de muitos alunos em sala de aula.

Ao reconhecer a Matemática em diversas situações no mundo que o cerca, o aluno passa de agente passivo para manipulador de objetos matemáticos, ou seja, “o sujeito do processo cognitivo é o aprendedor, é o aluno” (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2013, p. 25).



Espera-se com isso que o aluno possa estudar, formular, resolver e decidir e, embora não seja possível ao professor ensinar ou mostrar toda a Matemática de que os alunos necessitarão, é preciso habilitá-los a ter confiança em si próprios para resolver questões relacionadas a sua realidade e/ou ao seu cotidiano extraescolar.

As atividades de modelagem matemática devem apresentar-se, para os alunos, como uma forma de compreender situações da sua realidade, da realidade do seu meio e da sua comunidade, utilizando-se de conhecimentos matemáticos. Afinal, a proposta de trabalhar com o que lhes é significativo possibilita considerar que o aluno não chega à escola como um papel em branco; junto a ele está vinculado seu cotidiano, situações reais, é um indivíduo provido de saberes e experiências que podem ser traduzidos para o universo matemático. Dessa maneira, ao desenvolver atividades de modelagem matemática em sala de aula, o aluno precisa ser o sujeito do processo cognitivo e, além de matematizar situações reais, poderá aprender conteúdos matemáticos e perceber sua aplicabilidade e importância na sociedade (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2013).

Outra característica de atividades de modelagem matemática é que essas são essencialmente cooperativas, ou seja, ancoradas em trabalhos em grupo. O trabalho cooperativo oferece aos alunos a oportunidade de desenvolver capacidades de aprendizagem tais como: falar, ouvir, pensar, criar, raciocinar, comunicar e questionar. Conforme Almeida e Dias (2004), um ambiente de cooperação e interação entre os alunos, e entre professor e aluno, é fundamental para a construção do conhecimento, além de estimular a relação com a sociedade, visto que é nela que, geralmente, tem origem a situação problema a ser investigada pelo aluno.

103

Para Silva (2008, p.82), quando os alunos se envolvem com Modelagem Matemática em grupo “têm a possibilidade de discutir as diferentes estratégias para resolver um mesmo problema, e isso pode contribuir significativamente para a aprendizagem dos conceitos envolvidos”. Ainda, quando os sujeitos interagem e há conflito, há também benefícios mútuos, pois a interação possibilita ao aluno desenvolver capacidades de aprendizagem e dominar novos conhecimentos.

Faz parte das ações dos alunos, em grupo e/ou individualmente, em atividades de modelagem matemática: questionar, problematizar, sugerir, bem como analisar os dados, a situação e todas as suas restrições e, quando julgarem necessário e pertinente levá-las em consideração.

Sendo assim, atividades de modelagem matemática envolvem situações reais e motivam os alunos a identificar a matemática presente nelas, contribuindo na compreensão e construção

de um conhecimento matemático mais significativo, crítico e reflexivo. Durante o desenvolvimento desse tipo de atividades os alunos mobilizam uma série de ações cognitivas, descritas na seção a seguir.

### **Ações cognitivas dos alunos em atividades de modelagem matemática**

Na transição de uma situação inicial (problemática) para uma final (solução para a situação inicial) é imprescindível que o aluno assuma alguns procedimentos, que aparecem, de certa forma, associados às suas ações cognitivas, a saber: *compreensão da situação, estruturação da situação, matematização, síntese, interpretação e validação, argumentação e comunicação*. Tais procedimentos estão presentes, de forma implícita, nas escolhas que os alunos fazem ou assumem e de forma explícita nas representações utilizadas.

Considera-se que uma atividade de modelagem inicia-se quando o aluno identifica ou é apresentado a uma situação problema. A partir de então, ele realiza aproximações ou idealizações, busca compreender o problema por meio da interpretação de dados e informações, agrupamento de ideias, apreensão de significados; passa da situação inicial para a representação mental da situação em que o problema é identificado (VERONEZ, 2013). Na transição da situação problema para a representação mental da situação, e na busca por identificar o problema, a ação cognitiva associada é a *compreensão da situação*.

104

A partir das informações, ideias e significados de que o aluno dispõe, deverá fazer a simplificação e estruturação da situação problema em estudo. Assim, logo após a representação mental da situação, segundo Almeida e Silva (2012), os envolvidos com a atividade de modelagem matemática precisam tanto formular o problema quanto definir metas para a sua resolução. Essa ação cognitiva denomina-se *estruturação da situação*.

A evidência de um problema matemático implica a busca por respostas que satisfaçam tal problema. É o momento de transição da linguagem natural para a linguagem matemática, ou seja, de relacionar características da situação a conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos, sendo capaz de representar matematicamente essas características. A ação cognitiva identificada como *matematização* é o momento de procurar resposta para o problema, fundamentando-se em uma interpretação matemática. Para encontrar a solução para o problema, Veronez (2013, p. 34) pontua que “os alunos precisam matematizá-lo, resolvê-lo segundo um conjunto de procedimentos e inferir um resultado”. A ação cognitiva da matematização

direciona o aluno para a construção do modelo matemático, ao passo em que define e avalia hipóteses durante o processo de construção de tal modelo.

Quando o aluno, na sua busca por construir ou utilizar um modelo matemático, utiliza-se também de técnicas, representações, conceitos e métodos matemáticos, encaminha-se à obtenção de resultados para a situação problema; essa ação cognitiva denomina-se *síntese*. Nessa ação, são ativados os conhecimentos prévios e é requerido o uso ou a criação de novas ideias e conceitos matemáticos. Também na ação cognitiva síntese, pode haver recorrência a recursos tecnológicos como *softwares*, por exemplo, com o intuito de obter uma representação associada aos objetos matemáticos em estudo.

Após “sintetizar” seus conhecimentos matemáticos para resolver o modelo, os envolvidos com a atividade passam à análise do resultado obtido como resposta para a problemática levantada na situação inicial, o que constitui um processo avaliativo associado à representação matemática e aos procedimentos matemáticos utilizados. Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2013, p.18) “o aluno se depara com a necessidade de comparação e distinção de ideias, generalização de fatos, articulação de conhecimentos de diferentes áreas.” Essa ação cognitiva é caracterizada como *interpretação e validação*.

O desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, a partir de então, leva o aluno à ação cognitiva chamada *comunicação e argumentação*, que segundo Veronez (2013, p.35) “uma vez avaliada a resposta e assumida, por aqueles que desenvolvem a atividade de modelagem, como sendo razoável ou satisfatória, faz-se importante comunicar tal resposta do problema aos demais alunos da turma.” É um momento de convencimento, de que as estratégias e conceitos matemáticos são consistentes em relação à situação problema inicial.

O envolvimento dos alunos com esse conjunto de ações, conforme enfatizam Almeida, Silva e Vertuan (2013), pode ser mais ou menos intenso, o que depende dos seus conhecimentos e da sua familiaridade com atividades de modelagem matemática. Ainda decorrentes dessas ações cognitivas, podem ser identificados alguns procedimentos assumidos pelos alunos ao longo do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

### **Aspectos metodológicos**

Nossa opção metodológica para o presente estudo é a abordagem qualitativa por acreditarmos que ela possibilita a compreensão de certos fenômenos e do sujeito em suas especificidades. Esse tipo de pesquisa consiste em descrever, detalhadamente, situações com a

finalidade de compreender os indivíduos em seus próprios termos; assim, os dados coletados são predominantemente descritivos.

O presente estudo foi realizado em uma turma de 8<sup>o</sup> ano do Ensino Fundamental, na disciplina de Matemática, de um colégio estadual da rede pública, durante quatro semanas do quarto bimestre letivo, perfazendo um total de vinte horas/aula. A turma era composta de dezoito alunos, que foram divididos em trios para desenvolver atividades de modelagem matemática, sempre sob a orientação da primeira autora deste texto, já que ela era também a professora da disciplina.

No processo de coleta de dados consideramos as interações ocorridas durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática que foram registradas por meio de gravações em áudio e vídeo. Tais gravações foram transcritas e subsidiaram nossas análises. Além dessas transcrições, recolhemos, para análise, alguns registros escritos produzidos pelos alunos, no decorrer da atividade, em folhas de caderno à parte e cartazes ilustrativos.

Embora todos os grupos de alunos tenham se envolvido com a atividade de modelagem matemática Erva-Mate, trazemos para a discussão neste artigo apenas um dos grupos, cujos membros são nominados *Ma*, *Bi* e *Na* nos diálogos apresentados. A escolha por esse grupo se deu devido ao fato de os alunos deste grupo terem demonstrado maior envolvimento e comprometimento com a atividade.

106

Os diálogos são trazidos em forma de Episódios e representam recortes que retratam as principais discussões dos alunos no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. Nesses diálogos a professora pesquisadora é indicada pela abreviatura *Prof.*

### **Atividade de modelagem matemática: estudo da produção de Erva-Mate**

Posto que o tema possa ser escolhido pelos alunos, pelo professor ou por um acordo entre ambos (VERONEZ, 2013), esta atividade de modelagem matemática teve o tema Erva-Mate proposto pela professora. Tal tema foi proposto por considerar a região na qual os alunos residem e a familiaridade deles com o tema, uma vez que nesta região há inúmeras propriedades que cultivam a planta e três indústrias que beneficiam erva-mate para a comercialização e, inclusive, um considerável número de trabalhadores são familiares desses alunos.

Após breve familiarização com o tema, os alunos *Ma*, *Bi* e *Na* que compõem o grupo trazido para discussão neste artigo, organizaram-se em grupo e como não tinham definido um problema para resolver passaram a discutir sobre possíveis questões para investigação. O Episódio 1 retrata o momento em que esses alunos discutem sobre a seleção de um problema a resolver.

### **Episódio 1**

*Ma: Depois de quantos anos a erva pode ser podada? E de quanto em quanto tempo?*

[...]

*Ma: Se a gente perguntasse sobre o processo dela?*

*Na: O processo nós sabemos. Só que não me lembro. Se eu interrogasse alguém?*

*Ma: Teu pai não sabe?*

*Bi: O pai até sabe mas... Vamos lá, qual é a pergunta?*

*Ma: E se perguntasse o tamanho do pé?*

*Bi: E podar? Podar é o mesmo que colheita né? [sic]*

*Ma: É.*

[...]

*Ma: Que quantia aproximadamente de erva cabe em um 'bag'?*

*Bi: E arroba? Eu sei que tem alguma coisa a ver com erva.*

*Ma: Será que tem como saber em arroba depois que ela está empacotada?*

*Bi: Professora... Né que erva é vendida em arroba. [sic]*

*Professor: Sim. A erva-mate quando sai do campo ela é vendida em arroba.*

*Ma: Dá para perguntar quanto que está a arroba.*

*Bi: Mas daí como que nós falamos? Quanto que está a arroba?*

*Na: É 20 reais.*

*Prof.: Qual é o preço pago....*

*Na: Em uma arroba?*

*Bi: Professora.... Qual é o preço pago por uma arroba?*

*Prof.: Isso.*

*Ma: Quanto está sendo cobrado o quilo de erva?*

*Bi: O quilo ou o quilograma? Eu acho que tem o de 500 gramas. O pacote de 500 g e de 1 kg.*

*Na: É quilograma?(Pergunta para anotar no caderno)*

*Ma: É.*

[...]

*Ma: Quantas arrobas de erva podem ser produzidas em 2km<sup>2</sup>?*

*Bi: Mas daí nós vamos sofrer porque não sabemos responder. Pergunte para a professora. Professora venha aqui!*

*Ma: Professora, nós podemos fazer uma pergunta tipo assim: Quantas arrobas de erva podem ser produzidas em 2 ou 3 km<sup>2</sup>?*

*Prof.: Podem!*

Notamos no diálogo que os alunos utilizaram seus conhecimentos prévios acerca do tema para identificar perguntas relevantes a serem pesquisadas. Por exemplo, eles têm o conhecimento de que “a erva é vendida em arroba”, então afirmam que “dá para perguntar quanto que está a arroba”. Ao entrar em contato com informações sobre o tema e identificar problemas a investigar, os alunos chegam à conclusão que o mais indicado a resolver são perguntas pontuais, amparados na ideia de que lhes daria menos trabalho e despenderiam menos tempo para respondê-las. Quando o aluno sugere investigar “quantas arrobas de erva podem

*ser produzidas em 2km<sup>2</sup>?”*, o colega declara que “*dai nós vamos sofrer porque não sabemos responder*”, há evidências de que as escolhas dos alunos pautam-se no que eles consideram perguntas fáceis ou difíceis de responder.

Esses procedimentos, de levantar questões a partir de aspectos já conhecidos pelos alunos e de assumir as perguntas que lhes parecem mais fáceis de resolver, sugerem que a ação cognitiva *compreensão da situação* possibilitou que eles olhassem para o tema buscando delimitar problemas para investigação, visando conhecer mais sobre a erva-mate.

O fato de os alunos elencarem algumas questões permitiu estudos mais direcionados sobre o tema por meio de pesquisas na internet e de campo. A pesquisa de campo constituiu-se de uma visita orientada a uma indústria ervateira na comunidade, na qual os alunos tiraram dúvidas e coletaram informações com o proprietário e os funcionários do local, além da observação e registro por meio de vídeos e fotos dos equipamentos, máquinas e forma de produção da erva-mate para chimarrão.

A partir das informações que os alunos obtiveram, a ação cognitiva *estruturação da situação* favoreceu que eles repensassem os problemas escolhidos e direcionassem o encaminhamento que tomariam ao assumir algumas dessas informações como sendo relevantes. Tais informações aparecem descritas no quadro abaixo.

108

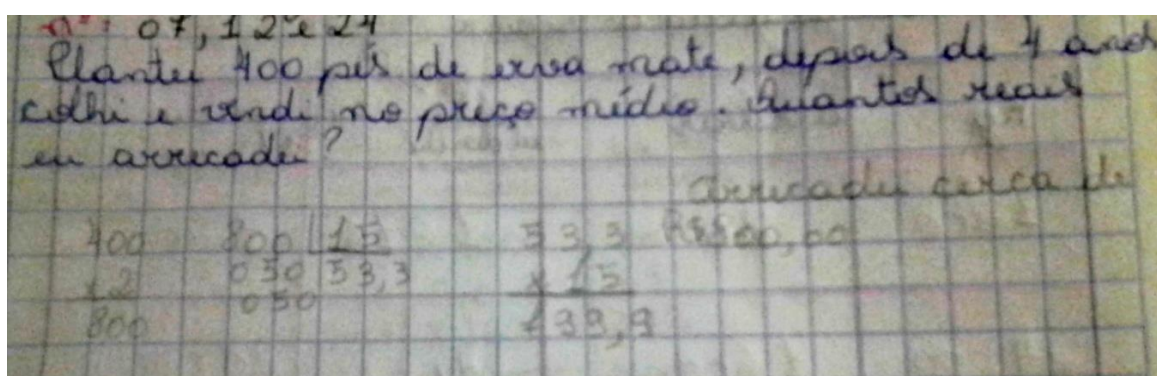
**Quadro1.** Resumo de informações relevantes (sob o ponto de vista dos alunos) sobre erva-mate.

Sobre o rendimento da colheita (poda) da erva-mate de acordo com o tempo: A cada 4 anos, um pé de erva-mate rende em média 2 Kg. A cada 6 anos, um pé de erva-mate rende em média 6 kg. A cada 15 anos, um pé de erva-mate pode render, em média, 30 kg. Ervas nativas mais antigas da propriedade podem render em média 150 a 200 kg. Distância de plantio: 1,5 m x 1,5 m. Comercialização: Uma arroba equivale a 15 kg. Beneficiamento e industrialização: Uma arroba verde rende aproximadamente 7,5 kg de erva seca. Chega a produzir em média 50 fardos; isso representa 1.500 pacotes por dia, embora tenha capacidade para produzir 400 pacotes por hora, mas devido a outros fatores a produção é reduzida. Preço médio da arroba verde: aproximadamente R\$15,00.
--

Fonte: Autoras.

O procedimento de resumir as informações indica que os alunos refletiram acerca dos dados obtidos para poder elencar aspectos que consideravam importantes, bem como simplificaram a situação em estudo.

Ao analisar os dados e avaliar o que de mais significativo a situação apresenta, o procedimento dos alunos foi reescrever as questões em linguagem matemática, ou seja, buscaram elaborar (novas) perguntas e/ou problemas utilizando as informações que tinham disponíveis, conforme sugerido pela professora. Essa transição de linguagens pode ser decorrente da ação cognitiva da *matematização*, que proporciona aos alunos, a partir de informações consideradas relevantes, reestruturar suas questões em forma de perguntas matemáticas, conforme ilustrado na Figura.



**Figura 1.** Problemas rotineiros elaborados pelos alunos. Fonte: Registro dos alunos.

Apesar de a forma como os alunos escreveram a pergunta parecer um problema rotineiro, tal pergunta (Figura 1) se constitui em uma ideia inicial a ser amadurecida pelos alunos, com a mediação da professora e de forma conjunta entre os colegas. O procedimento manifesto pelo aluno de identificação de um problema a resolver, partindo de perguntas matemáticas rotineiras, parece estar associado à ação cognitiva *compreensão da situação*, que proporcionou aos alunos olhar para a situação e deliberar que a investigação seria sobre: *Qual é a relação que existe entre a área de erva-mate cultivada, o tempo para extração e a quantidade de erva-mate para chimarrão produzida (em fardos)?*

Definido o problema a investigar, os alunos reconheceram a necessidade de pensar nos próximos encaminhamentos para a atividade de modelagem matemática, tais como: simplificar informações e definir metas e estratégias para avançar na resolução do problema. O procedimento manifesto foi a construção de um quadro que visava organizar as variáveis, o que sinaliza a mobilização da ação cognitiva *estruturação da situação*, pois indica que o aluno buscou simplificar e padronizar a situação em estudo a fim de facilitar o processo de resolução do problema em foco.

O olhar dos alunos para a situação problema aconteceu de forma fracionada para que, posteriormente, fosse possível associar os elementos parciais obtidos e construir a solução final. Essa forma de resolver o problema “por partes” para entender “o todo” é uma forma de simplificar a situação em estudo definindo metas sobre como resolvê-la, ou seja, foi um procedimento adotado pelos alunos. Auxiliados pela professora, simplificaram o problema de modo a obter, primeiramente, os resultados parciais, que colaborariam na resposta final. O procedimento manifesto, que foi a opção pela resolução “por partes”, sinaliza que a ação cognitiva *estruturação da situação* possibilitou aos alunos uma simplificação das informações e o entendimento da situação.

Tal simplificação foi organizada por meio de um quadro contendo as variáveis: *lado do terreno(m)*; *área do terreno (m<sup>2</sup>)*; *quantidade máxima de pés de erva-mate cultivados na área*; *quantidade de erva-mate produzida (pronta) e quantidade de fardos*. Cada uma dessas variáveis constituía colunas do quadro e foi entendida como uma “parte” da resolução do problema.

Como por exemplo, no Quadro 2, que representa a quantidade de erva-mate produzida e o número de fardos obtidos nessa produção, considerando-se o tempo de colheita de 4 anos.

**Quadro 2.** Quadro elaborado pelos alunos para resolver a situação problema.

Medida do lado do terreno quadrado (m)	Área do terreno (m <sup>2</sup> )	Quantidade máxima de pés de erva-mate	Quantidade de erva-mate (seca) produzida (Kg)	Quantidade de fardos produzidos
30	900	400	400	13 e 10 Kg
40	1600	676	676	22 e 16 Kg
50	2500	1089	1089	36 e 9 Kg

Fonte: Autoras.

110

O Episódio 2 retrata o procedimento de interpretação dos dados matemáticos, realizado pelos alunos para resolver o problema, mobilizado na ação cognitiva da *matematização*, e que favoreceu ao grupo definir estratégias de resolução a partir desses dados matemáticos.

### Episódio 2

**Bi:** Professora, como tem que fazer?

**Prof.:** Desenhe um terreno quadrado e considere que seus lados medem 30 metros de comprimento. (Esboçam o desenho no caderno e colocam as medidas do comprimento dos lados) Qual a distância de plantio entre mudas de erva-mate, segundo informações do funcionário da ervateira?

**Bi:** Um.

**Ma:** Um e meio.

**Prof.:** Isso, um e meio. Então quantos pés de erva é possível plantar nesse lado com 30 metros? (aponta para o desenho).

**Bi:** Tem que fazer 30 dividido por 1,5(usam a calculadora).

**Prof.:** Isso.



[...]

**Bi:** Dará 20.

**Prof.:** Isso, 20. Mas se considerarmos apenas uma leira, uma fila. Quantas filas de 20 cabem nesse terreno?

**Ma:** Daí faz 20 vezes 20.

**Bi:** Dará 400.

[...]

**Prof.:** E a quantidade de erva verde, colhida lá no campo?

**Bi:** Faz 400 vezes 1.

**Prof.:** Aqui estamos considerando a cada 4 anos. Quantos kg de erva verde rende cada pé se a colheita for realizada a cada 4 anos?

**Ma:** 400 pés vai dar...Tem que fazer...

**Bi:** 400 vezes 2.

**Ma:** Vai dar 800.

**Bi:** Mas a quantidade de erva depois de seca diminui a metade. Então dá 400.

**Prof.:** E quantos fardos? Um fardo tem quantos pacotes?

**Bi:** 30 pacotes e cada pacote tem 1 kg. Então um fardo tem 30 kg.

**Prof.:** Isso. Então esses 400 kg rendem quantos fardos?

**Ma:** Temos que fazer 400 dividido por 30. (Utiliza calculadora) Resulta em 13,333...

Nesse Episódio aparece o modo como o grupo de alunos fez para iniciar a resolução da situação problema identificada. O primeiro passo foi definir a medida do lado do terreno, decidindo por meio de um acordo que o formato seria de um quadrado. Depois, calculariam a área de tal terreno e em seguida a quantidade máxima de pés de erva-mate que poderia ser cultivada no terreno dado, considerando que a distância de plantio seria de 1,5 m. Definida a quantidade de árvores de erva-mate produzida, calculariam a quantidade de erva que poderia ser obtida com a extração, de acordo com o intervalo de colheita e, conseqüentemente, a quantidade de fardos de erva-mate pronta para comercialização.

O procedimento de resolver as situações matemáticas, como por exemplo, “faz 20 vezes 20”, “dá 400” e “temos que fazer 400 dividido por 30. Resulta em 13,333...”, mobilizado na ação cognitiva *síntese*, permitiu aos alunos utilizar o recurso da calculadora para inferir alguns resultados.

Depois de desenvolver os cálculos os alunos realizaram uma discussão com a presença e intervenção da professora, que sugeriu o entendimento e análise dos resultados obtidos. Esse diálogo está transcrito no Episódio 3.

### **Episódio 3**

**Prof.:** Qual o resultado?

**Ma:** 13,3333... A gente precisa colocar todos esses números?

**Prof.:** Certo. Mas antes vamos pensar. Quantos fardos “inteiros” ou “completos” é possível fazer com essa quantidade de erva?[sic]

**Bi:** 13 inteiros.

**Prof.:** Por quê? (silêncio) É possível eu chegar ali na ervateira e pedir “vírgula 33” fardos?

**Na:** Não. Mas e daí?

**Prof.:** Esse “vírgula 33” indica que, além dos 13 fardos completos, ainda sobrou alguma coisa.

**Ma:** Sobrou o que? Não estou entendendo.

**Bi:** A gente usa “vírgula 33” mesmo? (faz na calculadora) Aparece o zero na frente.

**Prof.:** Se você tirou os 13 inteiros o que sobrou? Faça a subtração: 13,33 menos 13.

**Ma:** Sobrou 0,33 o que?

**Prof.:** Os fardos eram formados de que?

**Bi:** De pacotes de 1 kg de erva. Então vai sobrar pacotes. Mas como vamos saber?

**Prof.:** Quais são as duas variáveis que vocês têm?

**Ma:** Fardos e pacotes.

**Prof.:** Então escreva isso no caderno [Esboçam no caderno]. Agora vocês sabem que 1 fardo tem quantos pacotes?

**Bi:** 30 pacotes.

**Prof.:** Logo, 0,33 do fardo será quantos pacotes?

**Ma:** Então 1 é igual a 30 e 0,33 é x? Daí faz “esse vezes esse e esse vezes esse”. [sic]

As indagações realizadas pela professora favoreceram aos alunos um repensar acerca dos resultados a fim de certificar-se da sua validade para o contexto em estudo; assim, a ação cognitiva *interpretação e validação de resultados* viabilizou o procedimento de avaliar se a resposta obtida era válida para aquela situação.

A recorrência à “regra de três” quando o aluno fala “*esse vezes esse e esse vezes esse*” ou, quando eles se referem: “multiplica em x” obtendo a equação  $1 \cdot x = 0,33 \cdot 30$ , resolvida na sequência em que se obtém  $x = 9,9$ , sinaliza que a ação cognitiva *síntese* foi responsável pelo procedimento de busca pelo resultado matemático para o problema.

112

Ao obter, para esse caso,  $x = 9,9$ , os alunos afirmaram “*não existe 9,9 pacotes! É 9 ou é 10!*” [sic]. Aqui notamos que os alunos já passam a analisar a resposta. Eles assumem que a resposta obtida não é apenas um número, mas uma quantidade que representa algo, nesse caso, número de pacotes de erva-mate. Nessa circunstância, o procedimento do aluno de analisar o novo resultado obtido mostra indícios de que mobilizou a ação cognitiva *interpretação e validação de resultado*. Tal ação possibilitou ao aluno elucidar que 9,9 ainda não era uma resposta satisfatória para o problema.

As discussões dos alunos acerca do cálculo da quantidade de pacotes de 1 kg restantes continuam e constituem o próximo Episódio.

#### **Episódio 4**

**Prof.:** Essa diferença pode ter acontecido porque só levamos em conta duas casas decimais e existem vários “três” depois da vírgula e isso faz muita diferença no resultado final, concordam? Mas vamos lá. Quantos fardos inteiros deu?

**Na:** 13.

**Prof.:** Cada fardo tem quantos pacotes de 1 kg?

**Bi:** 30 pacotes.

**Prof.:** Então quantos kg de erva vocês vão utilizar para formar esses 30 fardos?

[...]

**Bi:** Faz 13 vezes 30. Dá 390! 390 kg que a gente usou pra formar os fardos.

**Prof.:** Ok. Qual era o total de Erva-Mate produzida?

**Ma:** 400 kg.

**Prof.:** E desse total, quantos kg vocês utilizaram para formar os fardos? Ai vocês pensem quantos kg sobra. Se cada pacote contém 1 kg de erva, então a quantidade de erva que sobra é o número de pacotes que sobrarão também.

O procedimento dos alunos, a partir de sugestões da professora e da resposta avaliada como insatisfatória, foi encontrar uma nova forma de calcular a quantidade de pacotes de erva-mate restantes. Tal procedimento parece ter sido decorrente da ação cognitiva *matematização*, que levou os alunos a reconsiderar os dados e informações matemáticas que eles tinham e assumir outro encaminhamento na tentativa de resolver a situação. Assim, os alunos reconsideraram a situação efetuando os cálculos da seguinte maneira:

**Quadro 3.** Quantidade de pacotes de 1 Kg de erva-mate restantes.

13.  $30 = 390$  (quantidade de fardos multiplicada pela quantidade de kg por fardo igual à quantidade de kg de erva utilizada para formar os 13 fardos)

$400 - 390 = 10$  (quantidade total de erva produzida (kg) “menos” a quantidade de kg de erva utilizada para formar os 13 fardos, igual à quantidade de Kg (ou pacotes) restantes)

Fonte: Autoras.

O resultado de 10 pacotes ficou muito próximo do valor 9,9 obtido pelo aluno anteriormente. Ao assumir que “Faz 13 vezes 30. Dá 390!” e “400 menos 390 dá 10”, os alunos deixam transparecer que, da ação cognitiva *síntese*, o procedimento manifesto foi resolver as operações matemáticas exigidas para aquele contexto.

A partir da resolução da primeira situação (um terreno quadrado de 30 m x 30 m) os alunos passam a organizar e/ou elaborar seu pensamento matemático, tomando como exemplo os cálculos realizados para a primeira medida. Dessa forma, o procedimento dos alunos foi resolver os outros itens do problema com base no item anterior, sem a necessidade de grandes intervenções do professor, demonstrando ter autonomia na tomada de decisões e avaliação dos encaminhamentos matemáticos adotados. O Episódio 5 retrata esse fato.

### **Episódio 5**

**Ma:** 50 vezes 50

**Bi:** 2.500! 2.500 mais 2.500.. Não! É vezes 2.500.

**Ma:** Não! Calma! Agora é da quantidade de pés. Vou desenhar aqui. É 50 dividido por 1,5 metros. (Faz na calculadora)

**Bi:** É 75.

**Ma:** Agora é 75 vezes 75, eu acho.

**Na:** 5625.

**Ma:** Será que deu isso? Eu acho que eu errei.

**Bi:** É “deu muito”.

**Ma:** Eu acho que está certo porque aqui a gente fez 40 dividido por 1,5 metros deu 26. Então 26 vezes 26.

**Bi:** Agora faz dividido por 30. Dá 187,5.

**Ma:** Quanto?

**Bi:** Vamos fazer de novo essa conta, eu acho que está errada.

**Ma:** Eu acho que está errada essa conta.

**Bi:** Vamos fazer por 60.

**Ma:** Faz lá: 60 dividido por 1,5. (Faz na calculadora)

**Bi:** Dá 40. Então a “de cima” está errada.

[...]

**Ma:** 50 vezes 50 vai dar 2.500. Faz (50) dividido por 1,5. (Faz na calculadora)

**Bi:** Dá 33, 33.

**Ma:** Agora faz 33 vezes 33. Dá 1089.

Os alunos, no Episódio 5, estão em processo de cálculo da produção de erva-mate em uma área quadrada de 50 metros de lado, cuja colheita é feita a cada 4 anos. Percebemos que há uma grande cooperação entre os integrantes do grupo e suas discussões giram em torno de quais estratégias usariam para resolver a situação. Além disso, ao exclamar “*vamos fazer de novo essa conta, eu acho que está errada*” o aluno reconhece que o valor encontrado pode não ser satisfatório e há a necessidade de “refazer as contas”. Tal necessidade é confirmada no momento em que eles comparam os resultados. Esse procedimento de olhar para a situação, realizar comparações, afirmações e questionamentos, sinaliza que a ação cognitiva *interpretação e validação de resultado* contribuiu para o aluno considerar o resultado daquela parcela do problema como não correto e refazer o processo de cálculo.

Nesse caso, os alunos perceberam que pode ter ocorrido erro ao resolver a operação 50 dividido por 1,5 na qual obtiveram 75, quando na verdade o quociente seria 33,33... Mesmo a operação tendo sido feita com o uso da calculadora aconteceu esse erro. Foge do escopo do trabalho analisar a natureza desse erro; porém, é a partir dele que os alunos revisam a situação, reveem as características matemáticas dispostas e retomam seus procedimentos até chegar ao novo resultado obtido.

Nessa retomada, os alunos também percebem que para o intervalo de 4 anos entre as colheitas, o resultado da quantidade de erva-mate produzida (pronta e em kg) é igual ao resultado da quantidade máxima de pés de erva-mate cultivada na área determinada. Embora não tenham feito uma relação à propriedade associativa da multiplicação, os alunos conseguem perceber que “*o resultado aqui repete, está vendo?*” e isso pode ser indicação de que a resolução direta emergiu da ação cognitiva *síntese*, quando os alunos multiplicam e em seguida dividem por 2 e percebem que o resultado “repete”.

Depois de obter os primeiros resultados, os alunos haviam aprendido como deveriam resolver os demais, ou seja, foi só seguir os mesmos encaminhamentos para resolver as outras

medidas do terreno e para outros intervalos entre as colheitas. Os quadros elaborados (Figura 2) segundo sugestão da professora indicam que os alunos buscaram descrever os resultados encontrados e apontam indícios de que os alunos mobilizaram a ação cognitiva *argumentação e comunicação de resultados*, a qual os auxiliou a assumir que os encaminhamentos tomados, no decorrer da atividade, foram válidos e garantiram resultados satisfatórios.

A Figura 2 apresenta os resultados obtidos pelos alunos como resposta final e válida para a situação problema estruturada no início da atividade.

The figure shows three handwritten tables on grid paper, each representing a different harvest interval. The columns are: 'Lado de terreno' (Side of plot), 'área de terreno' (area of plot), 'Quantidade max por de erva-mate cultivada na área' (Maximum quantity of tea cultivated in the area), 'Quantidade de erva-mate produzida (pronta)' (Quantity of tea produced (ready)), and 'Quantidade de fardos de erva-mate' (Quantity of tea bales).

**Intervalo de 4 anos:**

Lado de terreno	área de terreno	Quantidade max por de erva-mate cultivada na área	Quantidade de erva-mate produzida (pronta)	Quantidade de fardos de erva-mate
30	900	400	400 kg	13 e 10 kg
40	1600	676	676 kg	22 e 16 kg
50	2500	1.089	1.089 kg	36 e 9 kg
60	3600	1.600	1.600 kg	53 e 10 kg
100	10000	4.356	4.356 kg	145 e 6 kg

**Intervalo de 15 anos:**

Lado de terreno	área de terreno	Quantidade max por de erva-mate cultivada na área	Quantidade de erva-mate produzida (pronta)	Quantidade de fardos de erva-mate
30	900	400	6000	200
40	1600	676	10.140	338
50	2.500	1.089	16.335	544 e 15 kg
60	3.600	1.600	24000	800
100	10000	4.356	65.340	2168

**Intervalo de 6 anos:**

Lado de terreno	área de terreno	Quantidade max por de erva-mate cultivada na área	Quantidade de erva-mate produzida (pronta)	Quantidade de fardos de erva-mate
30	900	400	1.200	40
40	1600	676	2.028	67 e 18 kg
50	2.500	1.089	3.261	108 e 21 kg
60	3.600	1.600	4.800	160
100	10000	4.356	13.068	435 e 18 kg

**Figura 2.** Produção de erva-mate de acordo com a área de cultivo e o intervalo entre as colheitas. Fonte: Registros dos alunos.

Para finalizar o estudo dessa situação problema, os alunos elaboraram cartazes com a situação final de modo a facilitar a socialização dos resultados e considerações acerca do tema à professora, aos colegas e a outras turmas.

No Episódio 6, o diálogo apresentado mostra como os alunos elucidam os encaminhamentos utilizados no desenvolvimento da atividade.

#### **Episódio 6**

**Prof.:** *Como vocês vão explicar esse resultado?*

[...]

**Ma:** *A cada 4 anos, num terreno de 30 por 30, o total de fardos vai ser 13 fardos fechados. Num terreno quadrado de 40 metros de lado vai ser 22 fardos fechados, cada fardo contendo 30 pacotes de 1 kg ainda sobram 16 pacotes e assim por diante... (referindo-se a resultados para outras medidas)*

**Prof.:** *Como e por que sobra 16?*

**Ma:** *Porque aqui deu 676 Kg de erva seca. Cada 1 kg dá um pacote, cada fardo tem 30 pacotes. Então pega o 676 e divide por 30 que dá 22 “vírgula alguma coisa”.*

**Prof.:** *E por que sobram 16?*

**Bi:** *Eu não lembro.*

**Ma:** *Aí você pega o 22 e faz vezes 30, o resultado, que é 660, faz menos 676 e por isso sobram 16 pacotes.*

As declarações dos alunos, ao relatar a forma como chegaram ao resultado, apresentando argumentos à professora e, posteriormente, aos colegas, indicam que a ação cognitiva *argumentação e comunicação de resultados* elucidada o procedimento de comunicar os resultados e convencer sobre a resposta final obtida.

116

A Figura 3 ilustra os procedimentos dos alunos, associados às suas ações cognitivas, ao longo da atividade de modelagem matemática Erva-Mate.

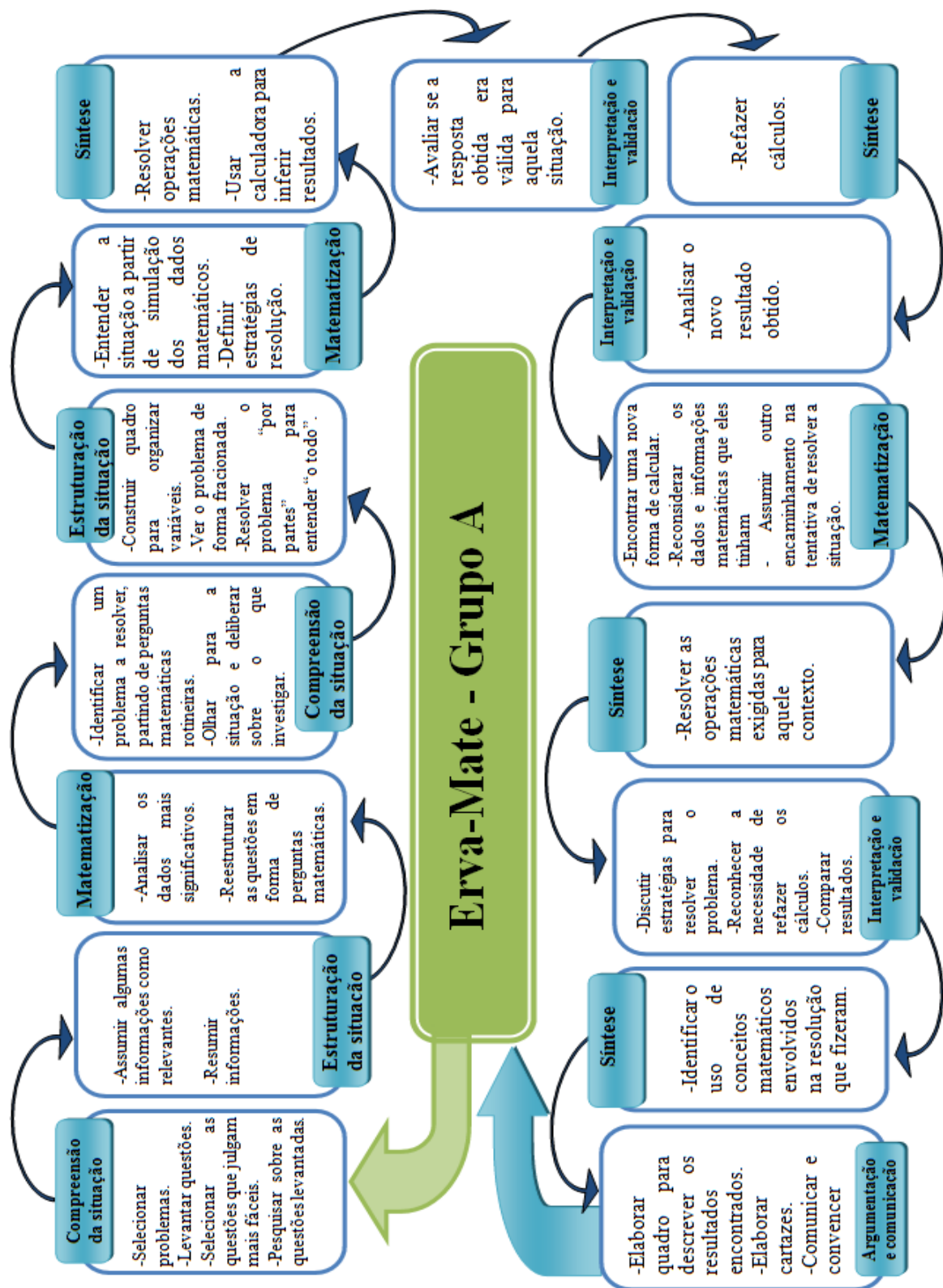


Figura 3. Procedimentos dos alunos associados às suas ações cognitivas. Fonte: Autoras.

## Considerações Finais

Ao utilizar atividades de modelagem matemática, como alternativa pedagógica, no contexto das aulas de Matemática, vislumbramos possibilitar aos alunos um ambiente de aprendizagem regido por discussões de situações-problema advindas do cotidiano, da realidade, que façam sentido e/ou sejam do interesse do aluno.

Mais do que aprender Matemática, atividades de modelagem matemática possibilitam conhecimentos diversos. Além disso, sugerem um olhar para a Matemática de forma ampla, uma vez que os conceitos trabalhados, utilizados e discutidos no âmbito de uma atividade de modelagem matemática vêm aliados ao olhar que se tenta ou se pretende dar ao problema em estudo. Neste trabalho, o tema Erva-Mate, embora tenha sido proposto pela professora, tinha relações com a realidade dos alunos e se constitui em um tema de interesse para eles. Na atividade desenvolvida pelo grupo de alunos *Ma*, *Bi* e *Na* foi possível identificar seus modos de pensar acerca da situação em estudo a partir dos procedimentos manifestos por eles em associação com suas ações cognitivas. Tais procedimentos refletem todas as escolhas dos alunos e sinalizam conhecimentos por eles mobilizados.

Os procedimentos manifestos pelos alunos, decorrentes de suas ações cognitivas, ao longo do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, ou seja, enquanto transitam da situação inicial para a final, revelam que não há linearidade nessas ações. Isso porque houve um movimento de idas e vindas na atividade que provocou que os alunos retomassem ou repensassem aspectos já considerados e os reavaliassem quando necessário. Tais atitudes provocaram mobilização de conhecimentos e ativaram, mais de uma vez e de forma não linear, cada uma de suas ações cognitivas.

Tal constatação fundamenta-se no fato de que alguns procedimentos evidenciados se repetem ao longo da atividade, quando são decorrentes da mesma ação cognitiva, ou apresentam características próximas entre si. Desse fato, inferimos que os procedimentos se complementam. Outro aspecto que destacamos com base nesse estudo é a importância do papel do professor. Ele tem a responsabilidade de provocar os alunos a assumir, repensar e mesmo modificar/alterar os procedimentos utilizados por eles ao longo da atividade de modelagem matemática e avaliar suas próprias conclusões acerca da resposta obtida para o problema em estudo, conforme é notório nos episódios apresentados.

Cabe ressaltar que a atividade de modelagem matemática descrita neste trabalho é apenas uma das possibilidades de se abordar o tema Erva-Mate. Sendo assim, foi o olhar



peculiar desse grupo de alunos que os levou a assumir determinados encaminhamentos e manifestar certos procedimentos que se mostraram relacionados ao seu modo de pensar, entender e administrar as informações sobre o tema, ou seja, associados às suas ações cognitivas. Logo, outros olhares conduziram a outros procedimentos.

Por fim, esperamos, com este trabalho, contribuir para o incentivo de outras iniciativas de implementação de atividades de modelagem matemática no contexto regular de ensino na Educação Básica.

## Referências

ALMEIDA, L. W. de; SILVA, K. P. da; VERTUAN, R. E. *Modelagem Matemática na Educação Básica*. 1. ed. 1ª reimpressão. SP: Contexto, 2013.

ALMEIDA, L. M. W; PALHARINI, B. N. Os "Mundos da Matemática" em atividades de Modelagem Matemática. *Boletim de Educação Matemática*, v. 26, n. 43, 2012, p. 907-934.

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da. Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de Modelagem Matemática: algumas relações. *Ciência & Educação*. v.18, n.3, 2012, p. 623-642.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. *Bolema*, ano 17, n. 22, 2003, p. 19 – 35.

119

BORROMEO FERRI, R. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, v. 38, n. 2, 2006, p. 86-95.

\_\_\_\_\_. Modelling problems from a cognitive perspective. In: HAINES, C. *et al.* (Orgs.), *Mathematical Modelling*. Education, Engineering and Economics. Chichester: Horwood, 2007, p. 260-270.

\_\_\_\_\_. On the influence of mathematical thinking styles on learners' modeling behavior. *ZDM (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik) – The International Journal on Mathematics Education*, v. 31. Karlsruhe, 2010, p. 99-118.

DIAS, M. R. *Uma experiência com Modelagem Matemática na Formação Continuada de Professores*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2005.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik) – The International Journal on Mathematics Education*, v. 38, n. 3. Karlsruhe: 2006, p. 302- 310.

MEYER, J. F. da C.; CALDEIRA; A. D.; MALHEIROS, A. P. dos S. *Modelagem em Educação Matemática*. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

SILVA, K. A. P. da. *Modelagem Matemática e Semiótica: algumas relações*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2008.

VERONEZ, M. R. D. *As funções dos signos em atividades de modelagem matemática*. Tese de Doutorado (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013. 176 p.

VERTUAN, R. E. *Práticas de monitoramento cognitivo em atividades de Modelagem Matemática*. Tese de Doutorado (Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2013. 247 p.